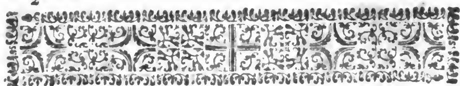
# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA.





Petrus Mengolus, Lucæ Tesino, adoleſcenti optimo S. D.





*N prima lectione Algebræ Speciosæ, tres tabulas triangulares tibi tradidi, multiplicium, & proportionalium, & nominum nuncupatas: earumque usum, ad componendas, & relinquendas poteſtates binomiorum, & per modum artis, explicaui. Eius demonſtrationem, præſenti trado libello; quam ex me audiſti: vt legendo recolas; & ad potiora mathemata ſuſcipienda, te præpares. Nihil alienum ſumo; præter quædam, ex Euclide, in quinto, & ſexto: quæ ſuis locis allego, in margine. Vale.*



GEO-

# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

## ELEMENTVM PRIMVM

### DEFINITIONES.

1 SI tabula triangularis, ex vertice, & basibus, & lateribus, ita concipiatur ordinata; vt in vertice sit quædam quantitas; & in prima basi, statim sub vertice, sint duæ quantitates; & in secunda basi, tres; & in tertia, quatuor; & sic deinceps: in singulis basibus, dicentur, quantitates extremæ, Prima, & Vltima; & his proximæ, Secunda, & Penultima; item Tertia, & Triultima; Quarta, & Quartultima; & deinceps.

2. Vnde latus primarum omnium quantitatum, dicetur, Primum; & secundarum, Secundum; & deinceps: vltimarum quoque dicetur, Vltimum; & penultimarum, Penultimum; & sic deinceps.

3. In singulis quoque lateribus, quantitas, quæ in vertice, aut quæ vertici est proxima, dicetur Prima; & reliquæ

deinceps, Secunda, Tertia, Quarta, & sic in infinitum.

4. Quantitas, vnde progressio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis. & significabitur, charactere *u*.

5. Et prima consequens à rationali, dicetur, Radix, vel Potestas prima. & significabitur, charactere cuiusq; litteræ alphabeti.

6. Et reliquæ consequentes, dicentur Potestates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta suum cuiusque ordinem. Et significabitur vnaquæque, eâdem litterâ suæ radicis, adscriptoque ordinis numero. vt radicis *a*, secunda potestas *a2*, tertia *a3*, & sic deinceps.

7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter potestates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, vnitate minùs ordinata, quàm sit prima potestas.

8. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima basi, duæ fuerint radices, prior, in primo latere, & posterior, in vltimo; & deinceps in primo latere, fuerint ordinatæ potestates prioris radicis, & in vltimo, potestates posterioris: fuerint autem, & in reliquis lateribus secundo, tertio, & deinceps in singulis, ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione primi lateris; item in penultimo, tritultimo, & reliquis deinceps lateribus, in singulis, ordinatæ fuerint continuè proportionales, in eadem ratione vltimi lateris: & in singulis basibus, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione radicum; in secunda basi, tres, quarum extremæ sunt secundæ pote-

states

ſtates radicum; in tertia, quatuor, quarum extremæ ſunt poteſtates tertiæ, & ſic deinceps: dicetur Tabula Proportionalium. *Huiuſmodi tabulam ordinat Euclides in 2. 8. Elementorum.*

9. In tabula proportionalium, inter extremas, vna quælibet media, ad quam rationalis habuerit rationem compoſitam ex duabus rationibus, ad quaſdã poteſtates vtrarumque radicum; denominabitur ab vtriſque ordinibus poteſtatum, à priore primùm, deinde à poſteriore. & ſignificabitur, ex vtriſq; characteribus, charactere compoſito; ex priore primùm, deinde ex poſteriore. Vt ſi prior eſt radix *a*, poſterior *r*; media, ad quam *u*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *u* ad *a*, & *u* ad *r*, dicetur, Vni prima; & ſignificabitur, charactere *ar*: ad quam verò *u*, rationem habet compoſitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*, dicetur, Bitertia; & ſignificabitur charactere *a2r3*: & ſic deinceps.

10. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit vnitas; & in prima baſi, & in lateribus primo, & vltimo, fuerint vnitates; deinceps verò in baſibus, quæ, verſus verticem ſibi inſiſtũt, quaſi fronti cornua, dicetur, Tabula multiplicium.

11. Si duæ tabulæ, multiplicium, & proportionalium, ita coaptentur, vertex, vertici, & latera, lateribus, & baſes, baſibus, vt congruant; ideſt, vt quiſque numerus multiplex, congruentem multiplicet proportionalem: producta, dicetur, Tabula Nominum. Significabitur autem vnumquodq; nomen, eodem ſuæ proportionalis charactere,

ctere, post suum immediatè numerum conscripto.

12. In quibusque proportionalitatibus earumdem, vel non earumdem rationum; homologæ sunt primùm, antecedentes, antecedentibus, & consequentes, consequentibus: deinde permutando, antecedentes suis consequentibus sunt homologæ: homologarum quoque æquemultiplices, & eædem partes, & summæ, & differentiæ, sunt homologæ.

13. Homologia, est sumptio homologarum, vt & in alia quadam proportionalitate, fiant homologæ.

14. Ratio ex æquali, dicetur, quælibet ratio, ex rationibus composita.



Ta-

*Tabula Proportionalium.*

u

a r

a2 ar r2

a3 a2r ar2 r3

a4 a3r a2r2 ar3 r4

a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5

a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6

*Tabula Multiplicium.*

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

*Tabula Nominum.*

u

a r

a2 2ar r2

a3 3a2r 3ar2 r3

a4 4a3r 6a2r2 4ar3 r4

a5 5a4r 10a3r2 10a2r3 5ar4 r5

a6 6a5r 15a4r2 20a3r3 15a2r4 6ar5 r6

## *Explicationes quarumdam notarum.*

Additio significabitur, charactere crucis: vt ex $a$, & $r$, collecta summa, $a + r$.

Subtractio, charactere lineolæ: vt ex $t$, dempta $a$, relinquit differentiam, $t - a$.

Æqualitas, ea interpunctione significabitur, qua partes principes periodi solent distingui. vt quod $a + r$, est æqualis ipsi $t$,

$$a + r : t.$$

Ratio significabitur interpunctione, qua maximæ partes periodi subdistinguuntur; scilicet puncto, & commate. vt ratio $a$ ad $r$, scribendo,

$$a ; r.$$

Itaque proportio $a$ ad $r$, sicut $a2$ ad $ar$, significabitur, scribendo,

$$a ; r : a2 ; ar.$$

Et composita ratio ex rationibus. velut ex $u$ ad $a2$, & $u$ ad $r3$, composita $u$ ad $a2r3$, scribendo,

$$u ; a2 , + u ; r3 : u ; a2r3.$$

vbi comma, inter $a2$, & crucem, vtiliter distinguit, ad significandum, non quantitatum $a2$, & $u$, summam $a2 + u$, sed rationum.

Multiplicata quoque ratio, significabitur. velut $a3$ ad $r3$, triplicata rationis $a$ ad $r$, scribendo,

$$a3 ; r3 : \text{triplicata } a ; r.$$

Theo-

*Theorema primum, Propositio prima.*

EX ijſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

*Hypotheſis.*

$a; b : c; d.$
$e; f : g; h.$

Dico ex æquali $a; b, + e; f : c; d, + g; h.$

*Præparatio.*

$e; f : b; i.$
$g; h : d; l.$

*Demonſtratio.*

11.5. | $b; i : d; l$
12.5. | $a; i : c; l$
def.5.6. | $a; b, + e; f : a; i.$
def.5.6. | $c; d, + g; h : c; l.$
11.5. | $a; b, + e; f : c; d, + g; h.$ Quod erat demonſtrandum.

Quare ex ijſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

---

*Theor. 2. Prop. 2.*

QVantitates proportionales, per homologiam ſunt proportionales.

*Demonſtr.*

def. 6.5.
12, & 24.5.
15.5
16.5
17.5
18.5

Nam conuertendo, quantitates fiunt proportionales: item homologas homologis addendo: item æque multiplicando, & æquepartiendo: & permutando: & diuidendo: & com-

19.5 ponendo: & homologas ab homologis aufe-
22.5 rendo; & per conuersionẽ rationis: & ex æquali in proportione ordinata: coniunctisq; omnifariam huiusmodi argumentis, quocunque ordine, per homologiam, proportionales fiunt. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 3. Prop. 3.*

POtestates æqueordinatæ totuplicatam habent rationem radicum, quotus est ordo.

*Hypoth.*

Sint radices, $a$, $r$: quarum potestates æqueordinatæ, $a3$, $r3$: numerus ordinis, 3.

Dico $a3$; $r3$: triplicatam $a$; $r$.

*Demonstrat.*

*def. 6.* $a3$; $u$: triplicata $a$; $u$.
*def. 6.* $u$; $r3$: triplicata $u$; $r$.
*p. h.* $a3$; $r3$: triplicata $a$; $r$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 4. Prop.*

SI tabulæ triangularis in vertice fuerit rationalis; & in prima basi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in singulis basibus, ordinatæ fuerint continuè proportionales: erit proportionalium tabula.

De-

*Demonstr.*

Cum enim in prima basi sint radices: erunt in
def. 6. secunda basi extremæ, secundæ potestates; dupli-
3. h. catam habentes rationem radicum: quę & dupli-
def. p. catam habent rationem deinceps: ergo ratio ra-
11. 5. dicum eadem est, quæ deinceps. Eodemque modo, in singulis basibus, ostendetur, quod ratio radicum eadem est, quæ deinceps. Quare vt in prima basi, ita in secunda, & reliquis, eadem semper est ratio primę quantitatis ad secundam, & secundæ ad tertiã, & sic deinceps; item penultimæ ad vltimam, & tritultimæ ad penultimã, & sic deinceps. Itaque in binis deinceps lateribus, & in binis deinceps basibus, quantitates eamdem habent rationẽ radicum, antecedentes, in vno, & consequentes, in
16. 5. altero latere: ergo permutando, eamdem habent rationẽ, antecedentes, in vna, & consequentes, in altera basi: & vt in primo latere sunt continuè proportionales, vt rationalis ad priorem radicem; ita in secundo, & in tertio, & in reliquis deinceps, in eadem sunt ratione continuè proportionales: & vt in vltimo, sunt continuè proportionales, vt rationalis ad posteriorem radicem; ita in penultimo,
def. 8. & tritultimo, & in reliquis deinceps. Quare tabula triangularis, est tabula proportionaliũ. Quod &c.

Quare &c.

*Theor. 5. Prop. 5.*

SI tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima basi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in singulis lateribus à primo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in primo: erit proportionalium tabula. Item si in singulis lateribus ab vltimo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in vltimo: erit proportionalium tabula.

*Demonstr.*

Cum in binis deinceps basibus, & in binis deinceps lateribus à primo, quantitates eandem habeant rationem, quæ deinceps, in primo, antece-
16. 5. dentes, in vna, & consequentes, in altera basi: habebunt, permutando, eamdem rationem etiam, antecedentes, in vno, & consequentes, in altero latere: eritque in basibus, ratio deinceps, eadem, quæ in prima basi: eruntque in singulis basibus, continuè proportionales in eadem ratione radi-
4. h. cum: quare tabula triangularis, erit proportionalium tabula. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione, ostendetur altera pars Theorematis. Quam &c.

Quare &c.

---

*Theor. 6. Prop. 6.*

IN tabula proportionalium, rationalis ad vnamquamq; mediam, habet rationem cōpositam ex rationibus, ad potestatem, in primo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, ab vltima; & ad potestatem, in vltimo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, à prima.

*Hypoth. & Demonst.*

*def. p.* Sit in tabula proportionalium, quinta basis; in qua, sex proportionales: & sit vna ex medijs, non prima, quæ est sextultima, nec sexta, quæ est vltima, sed quarta, quæ est tritultima. Et sint, in primo latere, radix *a*; & in vltimo, radix *r*: & ab *a*, sit secunda potestas *a2*, vnitate minùs ordinata,
*def. 8.* quàm tritultima; quæ profectò in primo latere, est
*def. 3.* tertia; & in tritultimo, est prima: sit etiam ab *r*, tertia potestas *r3*, vnitate minùs ordinata, quàm
*def. 8.* quarta; quæ profectò, in vltimo latere, est quar-
*def. 3.* ta; & in quarto, prima: erit quantitas *a2r3*,
*def. 9.* bitertia, ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus, ad potestates *a2*, & *r3*.

Dico mediam, in quinta basi, quartam tritultimam, esse bitertiam *a2r3*.

*Demonstr.*

*def. 2.* Nam quarta, & tritultima, in quarto est, & in tritultimo latere: in quarto quidem, est tertia quantitas; & in tritultimo, est quarta. Habet er-

go

go rationalis ad tertiam quarti lateris, rationem compositam ex rationibus, ad *r3* primam quar-
*def. 8.* ti lateris, & primæ quarti lateris ad tertiam: sed prima quarti lateris ad secundam, & secunda ad tertiam, sunt continuè proportionales, vt prima primi lateris ad secundam, & secunda ad tertiam:
*p. h.* ideoque prima ad tertiam quarti lateris, est vt pri-
*p. h.* ma *u*, ad tertiam primi *a2*: ergo rationalis ad tertiam quarti lateris, idest, ad quartam tritultimam, in quinta basi, rationem habet compositam ex rationibus, *u* ad *r3*, & *u* ad *a2*; eamdem, quam
*9. 5.* habet ad *a2r3* bitertiam. Ergo in quinta basi, quarta tritultima, est bitertia *a2r3*. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 7. Prop. 7.*

QVantitas, ad quam rationalis habet rationem compositam, ex rationibus ad potestates, in primo, & vltimo latere tabulæ proportionalium; est media: & est in basi æqueordinata, atque summa est ordinum postatum: & est vnitate plus ordinata, in basi, ab vltima, quàm sit ordo potestatis, in primo latere: item est vnitate plus ordinata, in basi, à prima, quàm sit ordo potestatis, in vltimo latere.

*Hypoth.*

Sit quantitas *a2r3*, ad quam *u*, rationem habet compositam, ex rationibus, *u* ad *a2*, in primo latere, & *u* ad

ad $r3$, in vltimo, tabulæ proportionalium: quarum poteſtatum ſumma ordinum, ſit ordo quintæ baſis: & quarum poteſtatum, vnitate maiores ordines, eius quidem $a2$, quæ in primo eſt latere, ſit ordo tritultimæ, & eius $r3$, quæ in vltimo eſt latere, ſit ordo quartæ, in baſi.

Dico $a2r3$, eſſe quartam tritultimam, in quinta baſi.

*Demonſtr.*

Eſt enim $a2$, tertia in primo latere; & vt $u$ ad $a2$, ita eſt, in quarto latere, prima ad tertiam:
def. 8. ſed eſt $r3$, prima in quarto latere: ergo $u$ ad ter-
p. b.
def. 8. tiam in quarto latere, rationem habet compoſitam, ex rationibus, ad $a2$, & ad $r3$; eamdem,
9. 5. quam ad $a2r3$. Ergo $a2r3$, eſt tertia in quar-
def. 3.
def. 2. to latere: ergo eſt quarta in tritultimo: ergo in
def. p. ſua baſi, eſt quarta tritultima: ſed quarta tritultima non eſt, niſi inter ſex proportionales, quarum & ſexta eſt vltima, & quinta eſt penultima, & ſic
def. 9. deinceps: & ſex proportionales, non niſi in quinta ſunt baſi. Ergo $a2r3$ bitertia, eſt & quarta tritultima, in quinta baſi. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 8. *Prop.* 8.

SVmma cuiuſque baſis nominum in tabula, eſt poteſtas æqueordinata ſummæ radicum.

*Hy-*

*Hypoth.*

Sit in tabula nominum baſis tertia, cuius ſumma nominum $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$: ſit quoque ſumma radicum $a + r$.

Dico $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, eſſe tertiam poteſtatem $a + r$.

Oportet autem priùs demonſtrare, de ſumma nominũ, præcedentium baſium, videlicet, ſecundæ baſis.

Dico itaque primò $a2 + 2ar + r2$, ſecundam eſſe poteſtatem $a + r$.

*Demonſtr.*

*def.* 8. | $u; a : a; a2 : r; ar : a + r; a2 + ar$.
& 2. *h.* | $u; r : a; ar : r; r2 : a + r; ar + r2$.
2. *h.* | $u; a + r : a + r; a2 + 2ar + r2$.
| $a2 + 2ar + r2$, eſt ſecunda poteſtas $a + r$. Quod &c.

*def.* 8. & 2. *h.* | $u; a : a2; a3 : ar; a2r : r2; ar2 : a2 + 2ar + r2; a3 + 2a2r + ar2$.
| $u; r : a2; a2r : ar; ar2 : r2; r3 : a2 + 2ar + r2; a2r + 2ar2 + r3$.
2. *h.* | $u; a + r : a2 + 2ar + r2; a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$.
*def.* 6. | $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, eſt tertia poteſtas $a + r$. Quod &c.
| Quare &c.

*Theo-*

*Theor. 9. Prop. 9.*

SI trium quantitatum, prima maior fuerit, quàm secunda; tertia autem maior fuerit excessu ipsarum: excessus tertiæ, supra excessum primæ, & secundæ; erit excessus summæ ex secunda, & tertia, supra primam.

*Hypoth.*

E A C B D

|——|——|——|——————|        ——————

Sit prima quantitas AB, maior, quàm secunda BC, quarum excessus CA: sitq; tertia D, maior, quàm CA.

Dico excessum D, supra CA, esse excessum summæ, ex D, & BC, supra BA.

*Præpar.*

Adponatur penes CB, & ipsi CA superponatur quantitas CE, æqualis ipsi D.

*Demonstr.*

Quoniam EA, est excessus EC supra CA; idest, excessus D, supra CA: necnon est excessus EB, supra BA; idest, summæ ex D, & BC, supra BA: per se patet, id quod propositum est.

Quare &c.

---

*Theor. 10. Prop. 10.*

INæqualium radicum, potestas maioris, vnà cum alternis nominibus eiusdem basis, demptis reliquis, æqueordinata relinquitur potestas differentiæ.

*Hypoth.*

Sint radices inæquales, $t$ maior, $a$ minor: quarum in tabula nominum, in basi tertia, poteſtas tertia maioris radicis $t3$, vnà cum alterno nomine $3ta2$, demptis reliquis nominibus $3t2a$, & $a3$; relinquitur quantitas $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; ſit autem differentia radicum $t - a$.

Dico $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, poteſtatem tertiam eſſe $t - a$.

Oportet autem priùs demonſtrare, in baſibus præcedentibus, videlicet in ſecunda.

Dico itaque primò $t2 - 2ta + a2$, eſſe ſecundam poteſtatem $t - a$.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| *def.* 8. | $u; t: t; t2 : a; ta : t - a; t2 - ta$. |
| & 2. *b.* | $u; a: t; ta: a; a2 : t - a; ta - a2$. |
| | $t; a : t2; ta: ta; a2 : t2 - ta; ta - a2$. |
| *ex* 14.5 | $ta$, eſt maior, quàm $a2$. |
| | $t2 - ta$, eſt maior, quàm $ta - a2$. |
| 9. *b.* | $t2 - ta$, dempta $ta - a2$, relinquitur $t2 - 2ta + a2$. |
| 2. *b.* | $u; t - a: t - a; t2 - 2ta + a2$. |
| *def.* 6. | $t2 - 2ta + a2$ ſecunda eſt poteſtas $t - a$. Quod &c. |
| *def.* 8. & 2. *b.* | $u; t: t2; t3 : ta; t2a: a2; ta2 : t2 - 2ta + a2; t3 - 2t2a + ta2$. |
| | $u; a: t2; t2a: ta; ta2 : a2; a3 : t2 - 2ta + a2; t2a - 2ta2 + a3$. |

$t; a:$

2. *h.* | $t;\ a : t3 - 2t2a + ta2,\ t2a - 2ta2 + a3.$

*ex* 14.5 | $t2 - 2t2a + ta2$, maior eſt, quàm $t2a - 2ta2 + a3$.

25. 5. | $t2a + a3$, maior, quàm $2ta2$.

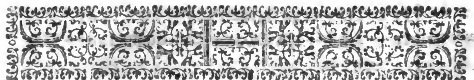
9. *h.* | $t3 - 2t2a + ta2$, dempta $t2a - 2ta2 + a3$, relinquitur $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

2. *h.* | $u;\ t - a : t2 - 2ta + a2;\ t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

*def.* 6. | $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, tertia eſt poteſtas $+ -$ $a$. Quod &c.

Quare &c.





Petrus Mengolus, Adm. R. D. Iacobo Venturolo, Scholarum Piarum Primario Arithmetices Præceptori S. D.



*Vos tibi primùm oſtendi characteres, & numeros, libenter vidiſſe te ſignificaſti, & cum tuæ Scholæ profectu multiplicibus exemplis confirmaſti. Immortales tibi ante omnia gratias debeo, quòd mea qualiacunque inuenta reſpexeris, & in tuæ Scholæ fructum conuerteris. Itaque pro redditione gratiarum, eamdem rem tibi aliquando gratam, iterum & plenius communico. Tu ergo libellum hunc in tuos vſus ita conuertes. Primùm per numeroſam inductionem exemplorum, duo theoremata confirmabis præcedentis libelli, 8. & 10. quibus ars producendi poteſtates à duorum nominum aggregatis, vel relictis radicibus demonſtratur. deinde ſingula in præſenti libello propoſita. necnon alia plura, quæ tùm indico, tùm ipſe tuopte poteris ingenio adijcere. Vale.*

GEO.

# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ
## ELEMENTVM SECVNDVM.
### DEFINITIONES.

1 Quantitas vtcunque diuisa in duas partes, dicetur, Tota, & significabitur, charactere *t*.
2 Et partes Totæ, dicentur, Abscissa, & Residua: & significabitur abscissa, charactere *a*; & residua, *r*.

3. Potestates totæ, dicentur, Tota secunda, *t2*; Tota tertia, *t3*; & deinceps: & potestates abscissæ dicentur, Abscissa secunda, *a2*; Abscissa tertia, *a3*; & deinceps: item potestates residuæ, dicentur, Residua secunda, *r2*; Residua tertia, *r3*; & deinceps.

4. Si quadam quantitate, diuisa vtcunque in partes, abscissam, & residuam; concipiatur à rationali, per ipsas partes, abscissam primùm, deinde residuam, ordinata proportionalium tabula: & eadem quantitate rursum diuisa vtcumque; concipiatur ab eadem rationali, altera proportiona-

tionalium tabula: quantitates, quarum in vtrisque eædem appellationes, & ijdem charácteres; dicentur, inuicem Synonymæ.

5. Item synonymarum æquemultiplices, dicentur, Synonymæ.

6. Ideoq; si etiam tabulæ nominum fuerint ordinatæ; quantitates; quarum eadem sunt nomina, dicentur Synonimæ.

7. Vnitas ad omnes numeros, pro rationali semper habebitur. Vnde conuenienter significabatur rationalis, charactere *u*.

8. Cuiusque numeri, factis omnibus integris abscissionibus, omnium, totidemque synonymorum, summa, dicetur, Massa: & significabitur, littera maiuscula *O*, ante synonymorum characterem scripta: vt massa ex omnibus abscissis, *O. a.* & massa ex omnibus triplis biprimis, *O. 3aır.*

9. Si cuiusque numeri, factis partibus, fuerit ordinata quædam tabula proportionalium, vel nominum; & loco cuiuslibet proportionalium, concipiatur massa suorum synonymorum: transformabitur tabula proportionalium in aliam, quæ dicetur, Tabula Speciosa.

10. In qua ordinatæ quantitates, dicentur, Species.

11. Tabula verò nominum transformabitur in aliam, quæ dicetur, Tabula Subquadratrix.

12. In qua ordinatæ quantitates, dicentur Subquadratrices.

13. Si

13. Si quælibet subquadratrix quantitas, multiplicata fuerit per numerum vnitate maiorem; quàm sit ordo suæ basis: producta quantitas, dicetur, Quadratrix.

14. Quod si, velut ex subquadratricibus, ita ex quadratricibus, tabula fuerit ordinata, dicetur Tabula Quadratrix.

15. Si duorum numerorum duæ speciosæ tabulæ fuerint ordinatæ: massæ, quarum in vtriusque sunt eædem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymæ.

16. Item homonymarum massarum equemultiplices, dicentur, Homonymæ.

17. Ideoque etiam in duabus subquadratricibus tabulis, aut in duabus quadratricibus, massæ, dicentur, Homonymæ.

18. Si tres numeri fuerint deinceps vnitate differentes; & medius dicatur, tota: maior quidem, dicetur, Sesquitota; & significabitur, charactere *q*.

19. Minor verò, Semitota: & significabitur, charactere *m*.

20. Et sicut medij numeri potestates dicuntur totæ, secunda, tertia, & deinceps: ita maioris numeri potestates, dicentur, Sesquitotæ; secunda *q2*, tertia *q3*, & deinceps.

21. Minoris autem, Semitotæ; secunda *m2*, tertia *m3*, & deinceps.

22. Et sicut medij numeri dicuntur Massæ, Species, Subquadratrices, & Quadratrices: ita maioris numeri, dicen-

centur, Sesquimassæ, Sesquispecies, Sesquisubquadratrices, & Sesquiquadratrices.

23. Et minoris, dicentur, Semimassæ, Semispecies, Semisubquadratrices, & Semiquadratrices.

24. Item, sicut totæ incrementum, est vnitas, ad componendam sesquitotam; & decrementum, est vnitas, ad relinquendam semitotam: ita cuiuslibet totæ, dicetur, Incrementum, numerus addendus, ad componendam sesquitotam æqueordinatam.

25. Et Decrementum, subtrahendus, ad relinquẽdam semitotam æqueordinatam.

26. Item cuiuslibet massæ Incrementum, dicetur, sufficiens numerus, ad componendam homonymam sesquimassam.

27. Et Decrementum, ad relinquendam homonymam semimassam.



*Tabula Speciosa.*

O.u

O.a O.r

O.a2 O.ar O.r2

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4

O.a5 O.a4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5

*Tabula Subquadratrix.*

O.u

O.a O.r

O.a2 O.2ar O.r2

O.a3 O.3a2r O.3ar2 O.r3

O.a4 O.4a3r O.6a2r2 O.4ar3 O.r4

O.a5 O.5a4r O.10a3r2 O.10a2r3 O.5ar4 O.r5

*Tabula Quadratrix.*

O.u

O.2a O.2r

O.3a2 O.6ar O.3r2

O.4a3. O.12a2r O.12ar2 O.4r3

O.5a4 O.20a3r O.30a2r2 O.20ar3 O.5r4

O.6a5 O.30a4r O.60a3r2 O.60a2r3 O.30ar4 O.6r5

*Postulatum vnicum.*

Postuletur, vt massam assumere concedatur homonymam, & proportionalem ad propositam quamdam, sicut numeri, aut vnitas ad inuicem.

*Theor.* 1. *Prop.* 1.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, & in qualibet baſi, ſpecies prima, & vltima, ſunt æquales; item ſecunda, & penultima; tertia, & tritultima; & ſic deinceps: item ſeſquiſpecies; & ſemiſpecies homonymæ: & ſpecierum incrementa, & decrementa. Similiter ſubquadratrices, in ſua tabula: & quadratrices, in ſua.

*Hypoth.* 1.

Sint in tabula ſpecioſa, cuiuſq; numeri, & in tertia baſi, prima ſpecies *O.a3*, & vltima *Or3*.

Dico, *O.a3*, *O.r3*, eſſe æquales.

*Demonſtr.*

*def. 8.h.* Nã cuiuſq; numeri, quot ſunt abſciſſiones, tot ſunt abſciſſæ, totidemq; reſiduæ: & abſciſſæ ſunt, vnitas, binarius, & deinceps: & reſiduæ ſunt, totidem ordinati, contrario tamen ordine, ſed deinceps, vſque ad binarium, & vnitatem. Quare vnaquæq; abſciſſa, vni reſiduæ eſt æqualis: & abſciſ-
*p. p.* ſa tertia, reſiduæ tertiæ, ad quas eadem rationalis, triplicatas habet eaſdem rationes: & omnes abſciſſæ tertiæ, omnibus reſiduis tertijs ſunt æquales; ideſt, *O.a3*, *O.r3*, ſunt æquales. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Sint deinde, in eadẽ tertia baſi, ſecunda ſpecies *O.a2r*, & penultima *O.ar2*.

Dico, *O.a2r*, *O.ar2*, eſſe æquales.

De-

*Demonstr.*

*sup.* Singulæ $a$, singulis $r$, sunt æquales: & singulæ $a2$, singulis $r2$: item singulæ biprimæ $a2r$, singulis vnisecundis $ar2$, sunt æquales; *p. p.* ad quas $u$, rationes habet compositas ex ijsdem rationibus: quare omnes biprimæ $O.a2r$, omnibus vnisecundis $O.ar2$, sunt æquales. Quod &c.

*Hypoth. 3.*

Sint sesquispecies $O.a2r$; $O.ar2$: vel sint semispecies. Dico, $O.a2r$; $O.ar2$, esse æquales.

*Demonstratio.*

*def. 22. h.* Quæ sunt vnius cuiusquam numeri sesquispecies; sunt alius, vnitate maioris numeri species: *sup.* sed species $O.a2r$, $O.ar2$, sunt æquales: ergo sesquispecies $O.a2r$, $O.ar2$, sunt æquales. Quod &c.

*def. 23. h.* Item quæ sunt vnius cuiusquam numeri semispecies; sunt alius, vnitate minoris numeri *sup.* species: sed species sunt æquales: ergo & semispecies. Quod &c.

Dico $O.a2r$, & $O.ar2$ incrementa esse æqualia, & decrementa æqualia.

*Demonstr.*

Nam ab æqualibus speciebus $O.a2r$, $O.ar2$, *sup.* æquales demptæ semispecies homonymæ, relinquunt æqualia decrementa. Quod &c.

*sup.* Et ab æqualibus sesquispeciebus, æquales

demptæ species homonymæ, relinquunt æqualia incrementa. Quod &c.

*Hypoth.* 4.

Sint in tabula subquadratrice, in tertia basi, subquadratrices, secunda *O.3a2r*, & penultima *O.3ar2*.

Dico *O.3a2r*, *O.3ar2*, esse æquales.

*Demonstr.*

def. 10. p. — Quoniam in tabula multipliciũ, in tertia basi, secundus numerus 3, & penultimus 3, ex iisdem vtrimque vnitatibus, & numeris aggregati, sunt æquales: æquemultiplicant species æquales, *O.a2r*, *O.ar2*; & subquadratrices producunt æquales, *O.3a2r*, *O.3ar2*. Quod &c. (sup. def. 12. b.)

Vnde patet, quod & sesquisubquadratrices sunt æquales; & semisubquadratrices æquales; & subquadratricum æqualia sunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

*Hypoth.* 5.

Sint denique in tabula quadratrice, in tertia basi, quadratrices, secunda *O.12a2r*, & penultima *O.12ar2*.

Dico, *O.12a2r*, & *O.12ar2*, esse æquales.

*Demonstr.*

def. 13. b. — Cum sint enim æqualium subquadratricum æquemultiplices; inter se sũt æquales. Quod &c.

Vnde constat, quod & sesquiquadratrices sunt æquales; & semiquadratrices æquales; & quadratricum æqualia sunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Quare &c.

*Theor.*

*Theor. 2. Prop. 2.*

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro incremento, maſſas aggregatas, in vtrolibet latere, ſi quæ ſunt præcedentes, atque totam vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſum latus: maſſas inquam, multiplicatas per numeros tabulæ multiplicium, in baſi acceptos, vnitate minùs ordinatam, quàm ſit alterum latus.

*Hypoth. 1.*

Eſto in tabula ſpecioſa, in primo, & in quintultimo latere, ſpecies *O.a4*: quam in quintultimo latere primam, nullæ ſpecies præcedunt: & eſto quarta tota *t4*.

Dico *O.a4*, incrementum eſſe *t4*.

*Demonſtrat.*

Eædem abſciſſiones totæ, quibus vnitas, binarius, & deinceps abſcinduntur; etiam ſeſquitotæ, ſunt abſciſſiones: & eædem vtrarumque ſunt abſciſſæ; necnon abſciſſæ quartæ. Sed præter abſciſſiones totæ, vna eſt vlterior abſciſſio ſeſquitotæ, qua ipſa tota abſcinditur: & pro qua poſt abſciſſas quartas totæ, & ſeſquitotę communes, accedit tota quarta, ſeſquitotæ propria: quæ ſpeciei *O. a4*, eſt incremētum, ad ſeſquiſpeciem componendam. Quod &c.

*def. 18 h.*

*def. 26 h.*

*Hypoth. 2.*

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in vltimo latere, ſpecies *O.r3*: quam in vltimo latere

quar-

quartam, species præcedunt, tertia $O.r2$, secunda $O.r$, prima $O.u$: & esto tota vnitate minus ordinata, quàm sit vltimum latus: quæ profectò, in
def. 7. p. ordine continuè proportionalium totarum, est
def. 7. 2. ipsa rationalis, atq; vnitas. $u$. Et quoniam $O.r3$, est & in quarto latere, sumatur basis tabulæ multiplicium, vnitate minus ordinata, nempe tertia, cuius numeri 3, 3.

Dico $O.r3$, incrementum esse, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$.

*Demonstr.*

Eædem abscissiones, totæ sunt, & sesquitotæ: pro quibus vna pars incrementi $O.r3$ taxabitur. Præter abscissiones totæ, vna est vlterior abscissio sesquitotæ, pro qua pars altera eiusdem incrementi taxabitur. Rursum prima pars incrementi, tot ex partibus componitur, quot sunt abscissiones, totæ, & sesquitotæ communes.

Est autem pro vna abscissione, totæ, & sesquitotæ, communi, eadem quidem abscissa, sed non eadem residua. Cumque totæ residua est $r$, sesquitotæ residua est $r + u$: quoniam & ipsa sesquitota vnitate maior est, quàm tota. Cum er-
8. p. go totæ residua tertia est $r3$; sesquitotæ est, $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$. Et quoniam ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, semper est ca-
7. 5. dem: & quantumlibet composita, non variat rationes, quibuscum componitur: huiusmodi autem

def.p.p. tem est $u$ ad $u$, ad $u2$, ad $u3$: eadem ergo quantitas est $u3$, atque $u$: & $3ru2$, quæ $3r$: & $3r2u$, quæ $3r2$: & $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$, quæ $r3 + 3r2 + 3r + u$. & sesquitotæ residua tertia, est $r3 + 3r2 + 3r + u$. Sed totæ residua tertia, est $r3$: ergo cuiusque residuæ incrementum est $3r2 + 3r + u$. Et omnium residuarum; idest, $O.r3$, omnia incrementa sunt $O.3r2 + O.3r + O.u$: totidem, quot sunt abscissiones communes, totæ, & sesquitotæ: & pars prima incrementi taxanda.

Pro vlteriori abscissione propria sesquitotæ, tota fit abscissa, cuius residua vnitas: & massæ $O.r3$, vlterior residua fit $u3$, idest $u$: pars altera incrementi taxanda. Quibus ex partibus, totum componitur incrementũ speciei $O.r3$, quod est, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$. Quod &c.

*Hypoth.* 3.

Esto in tabula speciosa, in quarto, & in quintultimo latere, species $O.a4r3$: quam in quintultimo latere præcedunt species, $O.a4r2$, $O.a4r$, $O.a4$: & esto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quintultimum: & esto basis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quartum; in qua basi, numeri sunt 3, & 3.

Dico $O.a4r3$, incrementum esse, $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4 + t4$.

*Demonstr.*

Pro communibus enim totæ, & ſeſquitotæ abſciſſionibus; vna eſt pars incrementi: & pro abſciſſione vlteriori, propria ſeſquitotæ; eſt altera. Et prioris partis incrementi, tot ſunt particulæ, quot ſunt abſciſſiones communes; nempè, quot abſciſſæ, quot reſiduæ, quot quadritertiæ: & ſingulæ particulæ, ſingula ſunt incremẽta quadritertiarum totæ, ad componendas quadritertias ſeſquitotæ.

Porrò totæ, & ſeſquitotæ, pro eadem abſciſſione, eadem eſt abſciſſa; ſed non eadem reſidua: & eadem eſt abſciſſa quarta; ſed non eadem reſidua tertia. cumque reſidua tertia totæ, eſt $r3$; reſidua tertia ſeſquitotæ, eſt $r3 + 3r2 + 3r + u$: & cum quadritertia totæ, eſt $a4r3$; quadritertia ſeſquitotæ eſt $a4r3 + 3a4r2 + 3a4r + a4$: & incrementum quadritertiæ, totæ, ad componendam quadritertiam ſeſquitotæ, eſt $3a4r2 + 3a4r + a4$. Et omnia ſimul incrementa quadritertiarum totæ, ad componendas omnes quadritertias ſeſquitotę, ſunt $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4$, prior pars incrementi $O.a4r3$. *ſup.*

Pro vlteriori abſciſſione propria ſeſquitotę, abſciſſa eſt $t$, reſidua $u$: & abſciſſa quarta $t4$, reſidua tertia $u3$: & quadritertia vlterior propria ſeſquitotæ, eſt $t4u3$, vel $t4$: & eſt poſterior pars incrementi $O.a4r3$. Ex quibus partibus integrum componitur incrementum $O.a4r3$, quod eſt, *ſup.*

$O.3a4r2$

$O. 3a4r2 + O.3a4r + O.a4 + t4$. Quod &c.

*Hypoth.* 4.

Esto in tabula ſpecioſa, in quinto, & in quartultimo latere, ſpecies $O.a3r4$: quam in quinto latere, pręcedũt ſpecies, $O.a2r4$, $O.ar4$, $O.r4$: & eſto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quintum: & eſto baſis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quartultimum; in qua baſi ſunt numeri 3, 3.

Dico $O.a3r4$, incrementum eſſe, $O. 3a2r4 + O. 3ar4, + O.r4 + t4$.

*Demonſt.*

| | |
|---|---|
| | $O.3a4r2 : O.3a2r4$. |
| | $O.3a4r : O.3ar4$. |
| p. h. | $O.a4 : O.r4$. |
| | $O. 3a4r2 + O. 3a4r + O.a4 : O. 3a2r4 + O. 3ar4 + O.r4$. |
| p. h. | Sed $O.a4r3$, & $O.a3r4$ æqualia ſunt incremẽta: & eſt $O. a4r3$ incrementum $O.3a4r2 +$ |
| ſup. | $O.3a4r + O.a4 + t4$. Ergo etiam $O.a3r4$ incrementum eſt $O.3a2r4 + O.3ar4 + O.r4 + t4$. Quod &c. |
| | Quare &c. |

---

*Theor. 3. Prop. 3.*

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro decremento, maſſas in vno latere præcedentes, multiplicatas per numeros

tabulæ multiplicium, in basi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm sit alterum latus: proximam quidem massam, & alternas aggregatas; reliquas verò subtractas. Sed si nullæ sunt præcedentes; quòd species in ipso latere sit prima: pro decremento, habet semitotam, vnitate minùs ordinatam, quàm sit alterum latus.

*Hypoth.* 1.

Esto in tabula speciosa, in quinto, & in quartultimo latere, species $O.a3r4$, quam præcedentes, in quartultimo latere, sunt species, $O.a3r3$, $O.a3r2$, $O.a3r$, $O.a3$: quartæ autem basis tabulæ multipliciũ sint numeri 4,6,4.

Dico speciei $O.a3r4$, decrementum esse $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3$.

*Demonstr.*

Eædem abscissiones, quibus vnitas, binarius, & deinceps abscinduntur, etiam semitotæ sunt abscissiones; præter vnam propriam totæ, qua ipsa abscinditur semitota, & vnitas relinquitur. def.19.b

Quantum ad communes attinet abscissiones, cum eædem sint abscissæ, totæ, & semitotæ; non eædem sunt residuæ: cumque totæ residua sit $r$; semitotæ residua est $r - u$: & cum totæ residua quarta, sit $r4$; semitotæ residua quarta est $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$: cum deniq; totæ triquarta sit $a3r4$; semitotæ triquarta est $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$. 10.p.

Quantum ad non communem attinet abscissionem; si resi-

resida vnitas, vnitate minuatur, profectò nihil remanet: eritque $r$ quidem, vnitas; sed $r - u$, nihil: & erit $r4$, vnitas; sed $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$, nihil: & triquarta quidem totæ, erit $a3r4$; sed semitotæ alia vlterior quasi triquarta $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$, nihil. Ideoque perinde est, proprias computare semitotę triquartas, pro communibus; atque vnam amplius adijcere triquartam nullam, pro non communi absciſſione. Quare omnes triquartę, semitotę, sunt $O.a3r4 - O.4a3r3 + O.6a3r2 - O.4a3r + O.a3$; reuera pauciores, quàm ipsius totæ sunt absciſſiones; sed perinde æquales, atque si totidem numerarentur. Totæ autem, triquartæ omnes, sunt $O.a3r4$; reuera totidem, quot sunt eius absciſſiones. Et vtrarumque differentia, $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3$, est decrementū speciei $O.a3r4$. Quod &c.

*Hypoth. 2.*

Esto in tabula speciosa, in quarto, & in quintultimo latere, species $O.a4r3$: quam præcedentes in quarto latere, sunt species, $O.a3r3$, $O.a2r3$, $O.ar3$, $O.r3$: quartæ autem basis tabulæ multiplicium, numeri sunt 4, 6, 4.

Dico speciei $O.a4r3$, decrementum esse $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - Or3$.

*Demonstr.*

p. h. | $O.6a3r2 : O.6a2r3$.
| $O.4a3r : O.4ar3$.
| $O.a3 : O.r3$.
| $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3 : O.$

$4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

p. h. sup. Sed $O.a3r4$, & $O.a4r3$, decrementa sunt æqualia: & est $O.a3r4$, decrementum $O.4a3r3 - 6a3r2 + O.4a3r - O.a3$: ergo etiam $O.a4r3$, decrementum est $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$. Quod &c.

*Hypoth.* 3.

Esto in quartultimo latere, prima species $O.a3$: & esto semitota tertia $m3$.

Dico, decrementum $O.a3$, esse $m3$.

*Demonstr.*

Pro communibus enim totæ, & semitotæ abscissionibus, eædem vtrarumq; sunt abscissæ, & in proposita specie $O.a3$, residuæ nullæ: pro vlteriori verò abscissione, totæ propria, vltima est abscissa, vnitate minor, quàm tota, id-est, semitota $m$: & vltima abscissa tertia, propria totæ, est $m3$. Quare speciei $O.a3$, decrementũ est $m3$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 4. *Prop.* 4.

Tota quælibet, est æqualis, aggregatis omnibus minùs ordinatarum abscissarum speciebus, & vnitati, acceptis secundum numeros multiplices, in basi sibi æque-ordinata iacentes.

*Hypoth.*

Esto tota quinta $t5$; qua minùs ordinatæ abscissæ, $a4$, $a3$, $a2$, $a$, $u$; quarum species, $O.a4$, $O.a3$, $O.a2$, $O.a$, $O.u$:

$O.u$: & esto basis quinta multiplicium, cuius numeri, 5, 10, 10, 5.

Dico $15 : O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u$.

*Demonstratio.*

p. b. | O.$a5$, & O.$r5$; æqualia sunt incrementa: quorum alterum, $r5$; alterum, O.$5a4$ + O.$10a3$ + O.$10a2$ + O.$5a$ + O.$u$ + $u$. Quòd &c.
2. b. | Quare &c.

---

*Theor. 5. Prop. 5.*

Demonstrare, qualiter acceptis totis, quæque massa est æqualis.

*Methodus Demonstrationis.*

Oportet in demonstrando, procedere, à prioribus basibus tabulæ speciosæ, ad posteriores; & in singulis basibus, ab exterioribus speciebus, ad interiores.

Porrò in singulis basibus, pro prima, & vltima specie, vna est demonstratio; item pro secunda, & penultima; pro tertia, & tritultima. Nam, verbi gratia, secunda, qualiter acceptis totis demonstrabitur æqualis; taliter acceptis, æqualis erit etiã penultima: quia constat, secundam, & penultimam, esse æquales. p. b.

Sub hoc vno titulo, theoremata conueniunt innumerabilia: cum enim tabula speciosa, sit producibilis in infinitum, habet massas innumerabiles; idest, semper plures, quàm

quàm quot quisque assignauerit.

Vna tamen est omnium communis methodus demonstrandi, & duo sunt argumenta: vnum, ab æqualibus cuiusdam speciei incrementis; alterum ab æqualibus decrementis.

Pro vlteriori methodi ennarratione, dabimus triginta sex theoremata; quæ sufficiunt, pro vertice, & basibus tabulæ speciosæ, vsque ad decimam inclusiuè: quædam demonstrata per vtrumque argumentum; quædam solùm per alterum; quædam denique sine demonstratione.

1. O.*u*: *t*—*u*.

*Demonstr.* 1.

| | |
|---|---|
| 4. *b.* | O.*u* + *u*: *t*. |
| | O.*u*: *t*—*u*. Quod &c. |

*Demonstr.* 2.

| | |
|---|---|
| | O.*a*. decrementa sunt æqualia. |
| 3. *b.* | O.*u*: *m*. |
| *def.* 19. *b.* | *m*: *t* — *u*. |
| | O.*u*: *t* — *u*. Quod &c. |

---

2. O.2*a*: *t*2 — *t*.

*Demonstr.* 1.

| | |
|---|---|
| 4. *b.* | O.2*a* + O.*u* + *u*: *t*2. |
| | O.2*a*: *t*2 — O.*u* — *u*. |
| *sup.* 1. | O.*u*: *t*—*u*. |
| *p.* *b.* | O.2*a*: *t*2 — *t*. Quod &c. |

*De-*

*Demonſtr.* 2.

| | |
|---|---|
| | O.a2, decrementa ſunt æqualia. |
| 3. b. | O. 2a — O.u: m2. |
| | O. 2a: m2 + O.u. |
| def. 21. b. | m2: t2 — 2t + u. |
| ſup. p. | O. u: t — u. |
| | O. 2a: t2 — t. Quòd &c. |

---

3. O.6a2: 2t3 — 3t2 + t.

*Demonſtr.* 1.

| | |
|---|---|
| 4. b. | O. 3a2 + O.3a + O.u + u: t3. |
| | O.6a2 + O.6a + O.2u + 2: 2t3. |
| | O.6a2: 2t3 — O.6a — O.2u — u. |
| ſup. 2. | O.6a: 3t2 — 3t. |
| ſup. p. | O.2u: 2t — 2. |
| | O.6a2: 2t3 — 3t2 + t. Quod &c. |

*Demonſtr.* 2.

| | |
|---|---|
| | O.a3, decrementa ſunt æqualia. |
| 3. b. | O.3a2 — O.3a + O.u: m3. |
| | O.6a2 — O.6a + O.2u: 2m3. |
| | O.6a2: 2m3 + O.6a — O.2u. |
| def. 21. b | 2m3: 2t3 — 6t2 + 6t — 2. |
| ſup. 2. | O.6a: 3t2 — 3t. |
| ſup. p. | O.2u: 2t — 2. |
| | O.6a2: 2t3 — 3t2 + t. Quod &c. |

---

4. O.

4. $O.6ar : t3 - t.$

*Demonstr.* 1.

$O.a2r$, incrementa sunt æqualia.

2. *h.* $O.2ar + O.r + t : O.a2 + t2.$

$O.12ar + O.6r + 6t : O.6a2 + 6t2.$

$O.12ar : O.6a2 - O.6r + 6t2 - 6t.$

*sup.* 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

*sup.* 2. $O.6r : 3t2 - 3t.$

$O.12ar : 2t3 - 2t.$

$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

*Demonstr.* 2.

$O.a2r$, decrementa sunt æqualia.

3. *h.* $O.2ar - O.r : O.a2.$

$O.12ar - O.6r : O.6a2.$

$O.12ar : O.6a2 + O.6r.$

*sup.* 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

*sup.* 2. $O.6r : 3t2 - 3t.$

$O.12ar : 2t3 - 2t.$

$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

---

5. $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$

*Demonstr.*

4. *h.* $O.4a3 + O.6a2 + O.4a + O.u + u : t4.$

*sup. p.* $O.u : t - u.$

*sup.* 2. $O.4a : 2t2 - 2t.$

*sup.* 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

$O.4a3$

$O.4a3 + 2t3 - t2 : t4.$
$O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$ Quòd &c.

---

6. $O.12a2r : t4 - t2.$ *Demonst.* 1.

$O.a3r$, incrementa sunt æqualia.
2. b. $O.3a2r + O.3ar + O.r + t : O.a3 + t3.$
$O.12a2r + O.12ar + O.4r + 4t : O.4a3 + 4t3.$
sup. 4. & 2. $O.12ar : 2t3 - 2t.$ $O.4r : 2t2 - 2t.$
sup 5. $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$
$O.12a2r + 2t3 + 2t2 : t4 + 2t3 + t2.$
$O.12a2r : t4 - t2.$ Quod &c. *Demonst.* 2.
$O.a3r$, decrementa sunt æqualia.
3. b. $O.3a2r - O.3ar + O.r : O.a3.$
$O.12a2r - O.12ar + O.4r : O.4a3.$
sup. 4. $O.12ar : 2t3 - 2t.$
sup. 2. $O.4r : 2t2 - 2t.$
sup. 5. $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$
$O.12a2r - 2t3 + 2t2 : t4 - 2t3 + t2.$
$O.12a2r : t4 - t2.$ Quod &c.

---

7. $O.30a4 : 6t5 - 15t4 + 10t3 - t.$

*Demonstr.*

4. b. $O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u : t5.$
$O.60a4 + O.120a3 + O.120a2 + O.60a + O.12u$
sup. 2. $+ 12 : 12t5.$ $O.60a : 30t2 - 30t.$
sup. 3. $O.120a2 : 40t3 - 60t2 + 20t.$
sup. 5. $O.120a3 : 30t4 - 60t3 + 30t2.$

sup. p. | O.12u : 12t --- 12.
| O.60a4 + 30t4 --- 20t3 + 2t : 12t5.
| O.30a4 + 15t4 --- 10t3 + t : 6t5.
| O.30a4 : 6t5 --- 15t4 + 10t3 --- t. Quod &c.

---

8. O.60a3r : 3t5 --- 5t3 + 2t.

*Demonstr.*

| O.a4r, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.4a3r --- O.6a2r + Ò.4ar --- Or : O.a4.
| O.120a3r --- O.180a2r + O.120ar --- O.30r : O.30a4.
sup. 6. | O.180a2r : 15t4 --- 15t2.
sup. 4. | O.120ar : 20t3 --- 20t.
sup. 2. | O.30r : 15t2 --- 15t.
sup. 7. | O.30a4 : 6t5 --- 15t4 + 10t3 --- t.
| O.120a3r --- 15t4 + 20t3 --- 5t : 6t5 --- 15t4 + 10t3 --- t.
| O.120a3r : 6t5 --- 10t3 + 4t.
| O.60a3r : 3t5 --- 5t3 + 2t. Quod &c.

---

9. O.30a2r2 : t5 --- t.

*Demonstr.*

| O.a3r2, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.3a2r2 --- O.3ar2 + Or2 : O.2a3r --- O.a3.
| O.180a2r2 --- 180ar2 + O.60r2 : O.120a3r + O.60a3.
sup. 6. | O.180ar2 : 15t4 --- 15t2.

O.60r2:

sup. 3. | 0.6or2 : 2ot3 — 3ot2 + 1ot.
sup. 8. | 0.12oa3r : 6t5 — 1ot3 + 4t.
sup. 5. | 0.6oa3 : 15t4 — 3ot3 + 15t2.
| 0.18oa2r2 — 15t4 + 2ot3 — 15t2 + 1ot : 6t5.
— 15t4 + 2ot3 — 15t2 + 4t.
| 0.18oa2r2 : 6t5 — 6t.
| 0.3oa2r2 : t5 — t. Quod &c.

---

10. 0.12a5 : 2t6 — 6t5 + 5t4 — t2.
11. 0.6oa4r : 2t6 — 5t4 + 3t2.
12. 0.6oa3r2 : t6 — t2.
13. 0.42a6 : 6t7 — 21t6 + 21t5 — 7t3 + t.
14. 0.84a5r : 2t7 — 7t5 + 7t3 — 2t.
15. 0.21oa4r2 : 2t7 — 7t3 + 5t.
16. 0.42oa3r3 : 3t7 + 7t3 — 1ot.
17. 0.24a7 : 3t8 — 12t7 + 14t6 — 7t4 + 2t2.
18. 0.168a6r : 3t8 — 14t6 + 21t4 — 1ot2.
19. 0.168a5r2 : t8 — 7t4 + 6t2.
20. 0.84oa4r3 : 3t8 + 7t4 — 1ot2.
21. 0.9o.a8 : 1ot9 — 45t8 + 6ot7 — 42t5 + 2ot3
— 3t.
22. 0.36oa7r : 5t9 — 3ot7 + 63t5 — 5ot3 + 12t.
23. 0.126oa6r2 : 5t9 — 63t5 + 1oot3 — 42t.
24. 0.252oa5r3 : 5t9 + 21t5 — 11ot3 + 84t.
25. 0.63oa4r4 : t9 + 2ot3 — 21t.
26. 0.2oa9 : 2t1o — 1ot9 + 15t8 — 14t6 + 1ot4
— 3t2.

 27.0.180

27. $O.180a8r : 2t10 - 15t8 + 42t6 - 50t4 + 21t2.$

28. $O.360a7r2 : t10 - 2t6 + 50t4 - 30t2.$

29. $O.840a6r3 : t10 + 7t6 - 50t4 + 42t2.$

30. $O.1260a5r4 : t10 + 20t4 - 21t2.$

31. $O.66a10 : 6t11 - 33t10 + 55t9 - 66t7 + 66t5 - 33t3 + 5t.$

32. $O.660a9r : 6t11 - 55t9 + 198t7 - 330t5 + 231t3 - 50t.$

33. $O.990a8r2 : 2t11 - 66t7 + 220t5 - 231t3 + 75t.$

34. $O.1320a7r3 : t11 + 11t7 - 110t5 + 198t3 - 100t.$

35. $O.2310a6r4 : t11 + 55t5 - 231t3 + 175t.$

36. $O2772a5r5 : t11 - 22t5 + 231t3 - 210t.$

Et in infinitum, eadem methodo ſupra tradita, poteſt demonſtrari, qualiter acceptis totis, quæque maſſa eſt æqualis.

---

*Theor. 6. Prop. 6.*

Demonſtrare, qualiter acceptis ſemitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

*Meth. Demonſtr.*

Oportet præſupponere theoremata demonſtrata in præcedenti, ſua cuiuſque maſſæ propria: deinde totas reſoluere in ſemitotas, per *def.* 19.*h.* & per 8.*p.* vt ſequitur.

$t : m + u.$

$t2 : m2 + 2m + u.$

t3:

$t3 : m3 + 3m2 + 3m + u.$

$t4 : m4 + 4m3 + 6m2 + 4m + u.$

$t5 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 5m + u.$

$t6 : m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 15m2 + 6m + u.$

$t7 : m7 + 7m6 + 21m5 + 35m4 + 35m3 + 21m2 + 7m + u.$

$t8 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 70m4 + 56m3 + 28m2 + 8m + u.$

$t9 : m9 + 9m8 + 36m7 + 84m6 + 126m5 + 126m4 + 84m3 + 36m2 + 9m + u.$

$t10 : m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 210m6 + 252m5 + 210m4 + 120m3 + 45m2 + 10m + u.$

$t11 : m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 + 330m7 + 462m6 + 462m5 + 330m4 + 165m3 + 55m2 + 11m + u.$

Vnde, pro triginta ſex theorematis propoſitis in præcedenti, & demonſtrabilibus, alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. $O.u : m.$
2. $O.2a : m2 + m.$
3. $O.6a2 : 2m3 + 3m2 + m.$
4. $O.6ar : m3 + 3m2 + 2m.$
5. $O.4a3 : m4 + 2m3 + m2.$
6. $O.12a2r : m4 + 4m3 + 5m2 + 2m.$
7. $O.30a4 : 6m5 + 15m4 + 10m3 - m.$
8. $O.60a3r : 3m5 + 15m4 + 25m3 + 15m2 + 2m.$

9. O.

9. O.30a2r2 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 4m.

10. O.12a5 : 2m6 + 6m5 + 5m4 — m2.

11. O.60a4r:2m6 + 12m5 + 25m4 + 20m3 + 3m2 — 2m.

12. O.60a3r2:m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 14m2 + 4m.

13. O.42a6 : 6m7 + 21m6 + 21m5 — 7m3 + m.

14. O.84a5r:2m7 + 14m6 + 35m5 + 35m4 + 7m3 — 7m2 — 2m.

15. O.210 a4r2 : 2m7 + 14 m6 + 42 m5 + 70m4 + 63m3 + 21m2 — 2m.

16. O.420a3r3 : 3m7 + 21m6 + 63m5 + 105m4 + 112m3 + 84m2 + 32m.

17. O.24a7 : 3m8 + 12m7 + 14m6 — 7m4 + 2m2.

18. O.168a6r:3m8 + 24m7 + 70m6 + 84m5 + 21m4 — 28m3 — 10m2 + 4m.

19. O.168a5r2 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 63m4 + 28m3 — 8m2 — 8m.

20. O. 840a4r3 : 3m8 + 24m7 + 84m6 + 168m5 + 217m4 + 196m3 + 116m2 + 32m.

21. O.90a8 : 10m9 + 45m8 + 60m7 — 42m5 + 20m3 — 3m.

22. O.360a7r:5m9 + 45m8 + 150m7 + 210m6 + 63m5 — 105m4 — 50m3 + 30m2 + 12m.

23. O.1260a6r2 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 567m5 + 315m4 — 110m3 — 150m2 — 12m.

24. O.2520a5r3 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 +

651m5

651m5+735m4+520m3+60m2—96m.

25. O.630a4r4: m9+9m8+36m7+84m6+126m5 +126m4+104m3+96m2+48m.

26. O.20a9: 2m10+10m9+15m8—14m6+10m4 —3m2.

27. O.180a8r: 2m10+20m9+75m8+120m7+42m6 —84m5—50m4+40m3+21m2—6m.

28. O.360a7r2: m10+10m9+45m8+120m7+ 189m6+126m5—55m4—100m3+24m.

29. O.840a6r3: m10+10m9+45m8+120m7+ 217m6+294m5+265m4+60m3—108m2— 64m.

30. O.1260a5r4: m10+10m9+45m8+120m7+ 210m6+252m5+230m4+200m3+144m2+ 48m.

31. O.66a10: 6m11+33m10+55m9—66m7+ 66m5—33m3+5m.

32 O.660a9r: 6m11+66m10+275m9+495m8+ 198m7—462m6—330m5+330m4+231m3 —99m2—50m.

33. O.990a8r2: 2m11+22m10+110m9+330m8+ 594m7+462m6—242m5—550m4—11m3 +231m2+42m.

34. O.1320a7r3: m11+11m10+55m9+165m8+ 341m7+539m6+583m5+165m4—352m3 —220m2+32m.

35. O.2310a6r4: m11+11m10+55m9+165m8+ 330m7

330m7+462m6+517m5+605m4+484m3 — 88m2 — 232m.

36. 0.2772a5r5 : m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 + 330m7 + 462m6 + 440m5 + 220m4 + 176m3 + 528m2 + 384m.

Sicut autem possibile est, vltra decimam basim speciosæ tabulæ, in demonstrando procedere, in præcedenti; & ostændere, qualiter accepis totis quæque massa est æqualis: ita possibile est in præsenti procedere; & demonstrare, qualiter acceptis semitotis, quæque massa est æqualis.

---

*Theor. 7. Prop. 7.*

DEmonstrare, qualiter acceptis sesquitotis, quæque massa est æqualis.

*Meth. Demonstr.*

Oportet præsupponere theoremata, demonstrata sub titulo *prop.* 5. *h.* sua cuiusque propria: deinde totas resoluere in sesquitotas per *def.* 18. *h.* & per 10. *p.* vt sequitur.

t : q — u.

t2 : q2 — 2q+u.

t3 : q3 — 3q2+3q — u.

t4 : q4 — 4q3+6q2 — 4q+u.

t5 : q5 — 5q4+10q3 — 10q2+5q — u.

t6 : q6 — 6q5+15q4 — 20q3+15q2 — 6q+u.

t7 : q7 — 7q6+21q5 — 35q4+35q3 — 21q2+7q — u.

t8 : q8 — 8q7+28q6 — 56q5+70q4 — 56q3+28q2 — 8q+u.

t9 : q9 — 9q8 + 36q7 — 84q6 + 126q5 — 126q4 + 84q3 — 36q2 + 9q — u.

t10 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5 + 210q4 — 120q3 + 45q2 — 10q + u.

t11 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 462q5 — 330q4 + 165q3 — 55q2 + 11q — u.

Vnde, pro triginta ſex theorematis, propoſitis in 5.*h.* alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. *0.u : q — 2.*
2. *0.2a : q2 — 3q + 2.*
3. *0.6a2 : 2q3 — 9q2 + 13q — 6.*
4. *0.6ar : q3 — 3q2 + 2q.*
5. *0.4a3 : q4 — 6q3 + 13q2 — 12q + 4.*
6. *0.12a2r : q4 — 4q3 + 5q2 — 2q.*
7. *0.30a4 : 6q5 — 45q4 + 130q3 — 180q2 + 119q — 30.*
8. *0.60a3r : 3q5 — 15q4 + 25q3 — 15q2 + 2q.*
9. *0.30a2r2 : q5 — 5q4 + 10q3 — 10q2 + 4q.*
10. *0.12a5 : 2q6 — 18q5 + 65q4 — 120q3 + 119q2 — 60q + 12.*
11. *0.60a4r : 2q6 — 12q5 + 25q4 — 20q3 + 3q2 + 2q.*
12. *0.60a3r2 : q6 — 6q5 + 15q4 — 20q3 + 14q2 — 4q.*
13. *0.42a6 : 6q7 — 63q6 + 273q5 — 630q4 + 833q3 — 630q2 + 253q — 42.*
14. *0.84a5r : 2q7 — 14q6 + 35q5 — 35q4 + 7q3 + 7q2 — 2q.*

15. *O.2104a4r2 : 2q7 — 14q6 + 42q5 — 70q4 + 63q3 — 21q2 — 2q.*

16. *O.420a3r3 : 3q7 — 21q6 + 63q5 — 105q4 + 112q3 — 84q2 + 32q.*

17. *O.24a7 : 3q8 — 36q7 + 182q6 — 504q5 + 833q4 — 840q3 + 506q2 — 168q + 24.*

18. *O.168a6r : 3q8 — 24q7 + 70q6 — 84q5 + 21q4 + 28q3 — 10q2 — 4q.*

19. *O.168a5r2 : q8 — 8q7 + 28q6 — 56q5 + 63q4 — 28q3 — 8q2 + 8q.*

20. *O.840a4r3 : 3q8 — 24q7 + 84q6 — 168q5 + 217q4 — 196q3 + 116q2 — 32q.*

21. *O.90a8 : 10q9 — 135q8 + 780q7 — 2520q6 + 4998q5 — 6300q4 + 5060q3 — 2520q2 + 717q — 90.*

22. O.360a7r : 5q9 — 45q8 + 150q7 — 210q6 + 63q5 + 105q4 — 50q3 — 30q2 + 12q.

23. O.1260a6r2 : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 567q5 — 315q4 — 110q3 + 150q2 — 12q.

24. O.2520a5r3 : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 651q5 — 735q4 + 520q3 — 60q2 — 96q.

25. O.630a4r4 : q9 — 9q8 + 36q7 — 48q6 + 126q5 — 126q4 + 104q3 — 96q2 + 48q.

26. *O.20a9 : 2q10 — 30q9 + 195q8 — 720q7 + 1666q6 — 2520q5 + 2530q4 — 1680q3 + 717q2 — 180q + 20*

27. O.180a8r : 2q10 — 20q9 + 75q8 — 120q7 + 42q6 + 84q5 — 50q4 — 40q3 + 21q2 + 6q.

28. O.

28. O.360a7r2: q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 189q6 — 126q5 — 55q4 + 100q3 — 24q.

29. O.840a6r3: q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 217q6 — 294q5 + 265q4 — 60q3 — 108q2 + 64q.

30. O.1260a5r4: q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5 + 230q4 — 200q3 + 144q2 — 48q.

31. O.66a10: 6q11 — 99q10 + 715q9 — 2970q8 + 7854q7 — 13860q6 + 16698q5 — 13860q4 + 7887q3 — 2970q2 + 665q — 66.

32. O.660a9r: 6q11 — 66q10 + 275q9 — 495q8 + 198q7 + 462q6 — 330q5 — 330q4 + 231q3 + 99q2 — 50q.

33. O.990a8r2: 2q11 — 22q10 + 110q9 — 330q8 + 594q7 — 462q6 — 242q5 + 550q4 — 11q3 — 231q2 + 42q.

34. O.1320a7r3: q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 341q7 — 539q6 + 583q5 — 165q4 — 352q3 + 220q2 + 32q.

35. O.2310a6r4: q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 517q5 — 605q4 + 484q3 + 88q2 — 232q.

36. O.2772a5r5: q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 440q5 — 220q4 + 176q3 — 528q2 + 384q.

Sicut autem possibile est, vltra decimam basim Speciosę tabulæ demonstrare, qualiter acceptis totis quæque massa est æqualis, iuxta methodum 5 *h*. ita possibile est, etiam in

 præ-

præsenti procedere in infinitum, & demonstrare, etiam vltra decimam basim, qualiter acceptis sesquitotis, quæque massa est æqualis.

---

*Theor. 8. Prop. 8.*

Demonstrare, qualiter acceptis primi lateris speciebus, quæque massa est æqualis.

*Meth. Demonstr.*

Sub hoc vno titulo, innumerabilia theoremata censeri possent, quorum vna communis est methodis demonstrandi, per 5. *h.* resoluendo massas, in totas sibi æquales; & per 4. *h.* resoluendo totas, in species primi lateris sibi æquales.

Pro vlteriori methodi enarratione, proponemus viginti quinque theoremata, vnum cum demonstratione, & reliqua sine demonstratione: quæ possunt facilè demonstrari, secundum methodum assignatam.

1. *O2ar: O.a2+O.a.*

*Demonstr.*

5. *h.* | *O.6ar : t3 — t.*
4. *h.* | *t3 : O.3a2+O.3a+O.u+u.*
| *t : O.u+u.*
| *O.6ar : O.3a2+O.3a.*
| *O.2ar : O.a2+O.a.* Quod, &c.

2. *O.6a2r : O.2a3+O.3a2+O.a.*
3. *O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.*

4. O.

4. O.6a2r2 : O.a4 + O.2a3 + O.2a2 + O.a.
5. O.30a4r : O.6a5 + O.15a4 + O.10a3 — O.a.
6. O.60a3r2 : O.6a5 + O.15a4 + O.20a3 + O.15a2 + O.4a.
7. O.12a5r : O.2a6 + O.6a5 + O.5a4 — O.a2.
8. O.30a4r2 : O.2a6 + O.6a5 + O.10a4 + O.10a3 + O.3a2 + O.a.
9. O.20a3r3 : O.a6 + O.7a5 + O.5a4 + O.5a3 + O.4a2 — O.2a.
10. O.42a6r : O.6a7 + O.21a6 + O.21a5 — O.7a3 + O.a.
11. O.84a5r2 : O.4a7 + O.14a6 + O.28a5 + O.35a4 + O.14a3 — O.7a2 — O.4a.
12. O.420a4r3 : O.12a7 + O.42a6 + O.84a5 + O.105a4 + O.98a3 + O.63a2 + O.16a.
13. O.24a7r : O.3a8 + O.12a7 + O.14a6 — O.7a4 + O.2a2.
14. O.84a6r2 : O.3a8 + O.12a7 + O.28a6 + O.42a5 + O.21a4 — O.14a3 — O.10a2 + O.2a.
15. O.168a5r3 : O.3a8 + O.12a7 + O.28a6 + O.42a5 O.49a4 + O.42a3 + O.4a2 — O.12a.
16. O.210a4r4 : O.3a8 + O.12a7 + O.28a6 + O.42a5 + O.42a4 + O.28a3 + O.32a2 + O.23a.
17. O.90a8r : O.10a9 + O.45a8 + O.60a7 — O.42a5 + O.20a3 — O.3a.
18. O.360a7r2 : O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + O.210a6 + O.126a5 — O105a4 — O100a3 + O.30a2 + O.24a.

19. O.

19. $0.84046r3 : 0.1049 + 0.45a8 + 0.12047 + 0.21046 + 0.294a5 + 0.315a4 + 0.6043 - 0.15042 - 0.64a.$

20. $0.126045r4 : 0.1049 + 0.45a8 + 0.12047 + 0.21046 + 0.252a5 + 0.21044 + 0.20043 + 0.165a2 + 0.48a.$

21. $0.2049r : 0.2a10 + 0.1049 + 0.15a8 - 0.14a6 + 0.1044 - 0.3a2.$

22. $0.9048r2 : 0.2a10 + 0.1049 + 0.3048 + 0.6047 + 0.42a6 - 0.42a5 - 05044 + 0.2043 + 0.21a2 - 0.3a.$

23. $0.12047r3 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.3047 + 0.49a6 + 0.63a5 + 0.15a4 - 0.5043 - 0.2042 + 0.12a.$

24. $0.21046r4 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.3047 + 0.42a6 + 0.42a5 + 0.55a4 + 0.65a3 - 0.8a2 - 0.37a.$

25. $0.252a5r5 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.3047 + 0.42a6 + 0.42a5 + 0.2044 - 0.5a3 + 0.48a2 + 0.54a.$

Aliaque possunt in infinitum proponi theoremata, & demonstrari, quibus pateat, qualiter acceptis primi lateris speciebus, queque massa est æqualis.

---

*Theor. 9. Prop. 9.*

DEmonstrare, quæ, & qualiter acceptæ totæ species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant. Ex

Ex innumerabilibus theorematis, quæ ſunt huius tituli, proponimus vigintiquinque: & ex his quatuor ſolũmodo demonſtramus; quæ ſufficiunt, ad oſtendendã methodum.

1. *O.2a2+t2 : O.4ar+t.*

*Demonſtr.*

5. b. | *O.6a2 : 2t3 — 3t2+t.*
| *O.6a2+3t2 — t : 2t3.*
5. b. | *O.6ar : t3 — t.* *O.12ar : 2t3 — 2t.*
| *O.12ar+2t : 2t3.*
| *O.6a2+3t2 — t : O.12ar+2t.*
| *O.6a2+3t2 : O.12ar+3t.*
| *O.2a2+t2 : O.4ar+t.* Quod &c.

---

2. *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.*

*Demonſtr.*

5. b. | *O.4a3 : t4 — 2t3+t2.* *O.4a3+2t3 — t2 : t4.*
5. b. | *O.12a2r : t4 — t2.* *O.12a2r+t2 : t4.*
| *O.4a3+2t3 — t2 : O.12a2r+t2.*
| *O.4a3+2t3 : O.12a2r+2t2.*
| *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.* Quod &c.

---

3. *O.6a4+t4+t : O.24a3r+4t3.*

*Demonſtr.*

5. b. | *O.30a4 : 6t5 — 15t4+10t3 — t.*
| *O.30a4+15t4 — 10t3+t : 6t5.*
5. b. | *O.60a3r : 3t5 — 5t3+2t.*
| *O.60a3r+5t3 — 2t : 3t5.*

*O.120a3r*

5. b. | $0.120a3r + 10t3 - 4t : 6t5.$
| $0.30a4 + 15t4 - 10t3 + t : 0.120a3r + 10t3 - 4t.$
| $0.30a4 + 15t4 + 5t : 0.120a3r + 20t3.$
| $0.6a4 + 3t4 + t : 0.24a3r + 4t3.$ Quod &c.

---

4. $0.12a3r + t3 : 0.18a2r2 + t.$

*Demonstr.*

5. b. | $0.60a3r : 3t5 - 5t3 + 2t.$
| $0.60a3r + 5t3 - 2t : 3t5.$
5. b. | $0.30a2r2 : t5 - t.$
| $0.30a2r2 + t : t5.$
| $0.90a2r2 + 3t : 3t5.$
| $0.60a3r + 5t3 - 2t : 0.90a2r2 + 3t.$
| $0.60a3r + 5t3 : 0.90a2r2 + 5t.$
| $0.12a3r + t3 : 0.18a2r2 + t.$ Quod, &c.

5. $0.6a5 + 3t5 + 2t2 : 0.30a4r + 5t4.$
6. $0.12a4r + t4 : 0.24a3r2 + t2.$
7. $06a6 + 3t6 + 4t3 : 0.36a5r + 6t5 + t.$
8. $0.12a5r + t5 + t : 0.30a4r2 + 2t3.$
9. $0.18a4r2 + t3 : 0.24a3r3 + t.$
10. $0.6a7 + 3t7 + 7t4 : 0.42a6r + 7t6 + 3t2.$
11. $0.12a6r + t6 + 2t2 : 0.36a5r2 + 3t4.$
12. $0.18a5r2 + t4 : 0.30a4r3 + t2.$
13. $0.30a8 + 15t8 + 56t5 + 9t : 0.80a7r + 40t7 + 40t3.$
14. $0.60a7r + 5t9 + 25t3 : 0.210a6r2 + 21t5 + 9t.$
15. $0.30a6r2 + 2t5 + 3t : 0.60a5r3 + 5t3.$

16. O.

16. *O.120a5r3+10t3:O.150a4r4+t5+9t.*

17. *O.10a9+5t9+28t6+12t2:O.90a8r+15t8+30t4.*

18. *O.60a8r+5t8+50t4:O.240a7r2+28t6+27t2.*

19. *O.90a7r2+7t6+18t2:O.210a6r3+25t4.*

20. *O.120a6r3+10t4:O.180a5r4+t6+9t2.*

21. *O.6a10+3t10+24t7+24t3:O.60a9r+10t9*
*+36t5+5t.*

22. *O.60a9r+5t9+90t5+25t:O.270a8r2+36t7*
*+84t3.*

23. *O.90a8r2+8t7+57t3:O.240a7r3+40t5+25t.*

24. *O.120a7r3+15t5+25t:O.210a6r4+t7+39t3.*

25. *O.30a6r4+6t3:O.36a5r5+t5+5t.*

Et alia huiusmodi proponi possunt innumerabilia: quibus in singulis demonstrari poterit, quæ, & qualiter acceptæ totæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

---

*Theor.* 10. *Prop.* 10.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ semitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Pro innumerabilibus theorematis huius tituli, vigintiquinque proponimus, & vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. *O.2a2+m2+m:O.4ar.*

*Demonstr.*

6. b. $0.6a2 : 2m3 + 3m2 + m.$

$0.6a2 - 3m2 - m : 2m3.$

6. b. $0.6ar : m3 + 3m2 + 2m.$

$0.12ar : 2m3 + 6m2 + 4m.$

$0.12ar - 6m2 - 4m : 2m3.$

$0.6a2 - 3m2 - m : 0.12ar - 6m2 - 4m.$

$0.6a2 : 0.12ar - 3m2 - 3m.$

$0.2a2 : 0.4ar - m2 - m.$

$0.2a2 + m2 + m : 0.4ar$ Quod &c.

2. $0.2a3 + m3 + 2m2 + m : 0.6a2r.$

3. $0.6a4 + 3m4 + 8m3 + 6m2 + m : 0.24a3r.$

4. $0.12a3r + m3 + 3m2 + 2m : 0.18a2r2.$

5. $0.6a5 + 3m5 + 10m4 + 10m3 + 2m2 : 0.30a4r + m.$

6. $0.12a4r + m4 + 4m3 + 5m2 + 2m : 0.24a3r2.$

7. $0.6a6 + 3m6 + 12m5 + 15m4 + 4m3 : 0.36a5r + 3m2 + m.$

8. $0.12a5r + m5 + 5m4 + 8m3 + 4m2 : 0.30a4r2.$

9. $0.18a4r2 + m3 + 3m2 + 2m : 0.24a3r3.$

10. $0.6a7 + 3m7 + 14m6 + 21m5 + 7m4 + m : 0.42a6r + 7m3 + 3m2.$

11. $0.12a6r + m6 + 6m5 + 12m4 + 8m3 : 0.36a5r2 + m2 + 2m.$

12. $0.18a5r2 + m4 + 4m3 + 5m2 + 2m : 0.30a4r3.$

13. $0.30a8 + 15m8 + 80m7 + 140m6 + 56m5 + 20m2 + 9m : 0.240a7r + 70m4 + 40m3.$

14. $0.60a7r + 5m7 + 35m6 + 84m5 + 70m4 : 0.210a6m$

O.21046m + 10m3 + 30m2 + 4m.

15. O.3046r2 + 2m5 + 10m4 + 15m3 + 5m2 : O.60a5r3 + 2m.

16. O.120a5r3 + 20m2 + 16m : O.150a4r4 + m5 + 5m4.

17. O.10a9 + 5m9 + 30m8 + 60m7 + 28m6 + 20m3 + 12m2 : O.90a8r + 42m5 + 30m4 + 3m.

18. O.60a8r + 5m8 + 40m7 + 112m6 + 112m5 + 18m : O.240a7r2 + 20m4 + 80m3 + 7m2.

19. O.90a7r2 + 7m6 + 42m5 + 80m4 + 40m3 : O.210a6r3 + 27m2 + 22m.

20. O.120a6r3 + 20m3 + 36m2 + 16m : O.180a5r4 + m6 + 6m5 + 5m4.

21. O.6a10 + 3m10 + 20m9 + 45m8 + 24m7 + 30m4 + 24m3 : O.60a9r + 42m6 + 36m5 + 9m2 + 5m.

22. O.60a9r + 5m9 + 45m8 + 144m7 + 168m6 + 72m2 + 16m : O.270a8r2 + 36m5 + 180m4 + 24m3.

23. O.90a8r2 + 8m7 + 56m6 + 128m5 + 80m4 + 2m : O.240a7r3 + 63m3 + 61m2.

24. O.120a7r3 + 40m4 + 76m3 + 12m2 : O.210a6r4 + m7 + 7m6 + 6m5 + 24m.

25. O.30a6r4 + 8m2 + 8m : O.36a5r5 + m5 + 5m4 + 4m3.

Et omninò in qualibet basi speciosæ tabulæ, proponi, & demonstrari potest, quæ, & qualiter acceptæ semitotę, species vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

*Ther.* 11. *Prop.* 11.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc titulo vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. *O.2a2+q2+2:O.3ar+3q.*

*Demonstr.*

7.b. | *O.6a2:2q3—9q2+13q—6.*
| *O.6a2+3q2+6:2q3—6q2+13q.*
7.b. | *O.6ar:q3—3q2+2q.*
| *O.12ar:2q3—6q2+4q.*
| *O.12ar+9q:2q3—6q2+13q.*
| *O.6a2+3q2+6:O.12ar+9q.*
| *O.2a2+q2+2:O.4ar+3q.* Quod &c.

2. *O.2a3+q3+5q:O.6a2r+4q2+2.*
3. *O.6a4+3q4+30q2+6:O.24a3r+16q3+23q.*
4. *O.12a3r+q3+2q:O.18a2r2+3q2.*
5. *O.6a5+3q5+50q3+31q:O.30a4r+20q4+58q2+6.*
6. *O.12a4r+q4+5q2:O.24a3r2+4q3+2q.*
7. *O.6a6+3q6+75q4+93q2+6:O.36a5r+24q5+116q3+37q.*
8. *O.12a5r+q5+8q3:O.30a4r2+5q4+4q2.*
9. *O.18a4r2+q3+2q:O.24a3r3+3q2.*

10. 0.6a7 + 3q7 + 105q5 + 217q3 + 41q : 0.42a6r + 28q6 + 203q4 + 129q2 + 6.

11. 0.12a6r + q6 + 12q4 + 2q : 0.36a5r2 + 6q5 + 8q3 + q2.

12. 0.18a5r2 + q4 + 5q2 : 0.30a4r3 + 4q3 + 2q.

13. 0.30a8 + 15q8 + 700q6 + 2170q4 + 820q2 + 30 : 0.240a7r + 160q7 + 1624q5 + 1720q3 + 231q.

14. 0.60a7r + 5q7 + 84q5 + 30q2 : 0.210a6r2 + 35q6 + 70q4 + 10q3 + 4q.

15. 0.90a6r2 + 6q5 + 45q3 : 0.180a5r3 + 30q4 + 15q2 + 6q.

16. 0.120a5r3 + 5q4 + 16q : 0.150a4r4 + q5 + 20q2.

17. 0.10a9 + 5q9 + 300q7 + 1302q5 + 820q3 + 93q : 0.90a8r + 60q8 + 812q6 + 1290q4 + 348q2 + 10.

18. 0.60a8r + 5q8 + 112q6 + 80q3 : 0.240a7r2 + 40q7 + 112q5 + 20q4 + 7q2 + 18q.

19. 0.180a7r2 + 14q6 + 105q4 + 44q : 0.420a6r3 + 84q5 + 80q3 + 54q2.

20. 0.120a6r3 + 6q5 + 36q2 : 0.180a5r4 + q6 + 5q4 + 20q3 + 16q.

21. 0.6a10 + 3q10 + 225q8 + 1302q6 + 1230q4 + 279q2 + 6 : 0.60a9r + 40q9 + 696q7 + 1548q5.

22. 0.60a9r + 5q9 + 144q7 + 180q4 + 16q : 0.270a8r2 + 45q8 + 168q6 + 36q5 + 24q3 + 72q2.

23. 0.90a8r2 + 8q7 + 128q5 + 61q2 + 2q : 0.240a7r3 + 56q6 + 80q4 + 63q3.

24. 0.

24. O.1204a7r3+7q6+76q3 : O.2104a6r4+q7+6q5+40q4+12q2+24q.

25. O.30a6r4+5q4+8q : O.36a5r5+q5+4q3+8q2.

Possunt hæc, & alia huiusmodi, sub hoc titulo demonstrari, in infinitum, iuxta traditam methodum: vt omninò pateat, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas æquales faciant.

---

*Theor.* 12. *Prop.* 12.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc etiam titulo, vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. O.a2+O.a : O.2ar. Demonstratum est in 8. *h.*
2. O.2a3+O.3a2+O.a : O.6a2r. Demonstr. ibidem.
3. O.a4+O.2a3+O.a2 : O.4a3r. Demonstr. ibidem.
4. O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.

*Demonstr.*

8. *h.* | O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.
| O.4a3r+O.a2+O.a : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.
8. *h.* | O.6a2r2 : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.
| O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2. Quod &c.

5. O.6a5+O.15a4+O.10a3 : O.30a4r+O.a.
6. O.6a4r+O.2a3+O.3a2+O.a : O.12a3r2.
7. O.2a6+O.6a5+O.5a4 : O.12a5r+O.a2.

8. O.12a5r+O.5a4+O.10a3+O.4a2 : O.30a4r2 +O.a.

9. O.30a4r2 +O.8a5 +O.5a2:O.40a3r3 +O.3a.

10. O.6a7 +O.21a6 +O.21a5 +O.a:O.42a6r +O.7a3.

11. O.12a6r+O.6a5+O.15a4+O.8a3 : O.36a5r2 +O.3a2 +O.2a.

12. O.9a5r2+O.2a3+O.3a2+O.a : O.15a4r3.

13. O.3a8+O.12a7+O.14a6+O.2a2 : O.24a7r +O.7a4.

14. O.12a7r +O.7a6 +O.21a5 +O.14a4 +O.a: O.42a6r2 +O.7a3 +O.6a2.

15. O.6a6r2+O.2a4+O.4a3+O.a2 : O.12a5r3 +O.a.

16. O.24a5r3+O.4a2 +O.5a:O.30a4r4 +O.a4 +O.2a3.

17. O.10a9 +O.45a8+O.60a7+O.20a3 :O.90a8r +O.42a5 +O.3a.

18. O.30a8r+O.20a7+O.70a6+O.56a5 +O.10a2+ O.9a:O.120a7r2+O.35a4+O.40a3.

19. O.90a7r2 + O.42a5 + O.105a4 + O.40a3: O.210a6r3+O.20a2+O.22a.

20. O.120a6r3 +O.20a3 +O.45a2 +O.16a: O.180a5r4+O.6a5+O.15a4.

21. O.2a10 +O.10a9+O.15a8+O.10a4 : O.20a9r+ O.14a6+O.3a2.

22. O.20a9r+O.15a8+O.60a7+O.56a6 +O.20a3 +O.24a2:

$+0.24a2 : 0.90a8r2 + 0.42a5 + 0.60a4 + 0.3a.$

23. $0.90a8r2 + 0.56a6 + 0.168a5 + 0.80a4 + 0.27a : 0.240a7r3 + 0.120a3 + 0.61a2.$

24. $0.120a7r3 + 0.40a4 + 0.115a3 + 0.12a2 : 0.210a6r4 + 0.7a6 + 0.21a5 + 0.49a.$

25. $0.30a6r4 + 0.8a2 + 0.13a : 0.36a5r5 + 0.5a4 + 0.10a3.$

Et alia deinceps proponi possunt, & demonstrari: & vniuersaliter possibile est demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species, in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

---

*Theor.* 13: *Prop.* 13.

IN tabula subquadratrice cuiusque numeri, & in qualibet basi, subquadratrices, & æque ordinata tota, totam componunt, vnitate plus ordinatam.

*Hypoth.*

In tabula subquadratrice, in secunda basi, sint subquadratrices $O.a2$, $O.2a3$, $O.r2$: sitque tota secunda, $t2$; tota tertia, $t3$.

Dico $O.a2 + O.2ar + O r2 + t2 : t3$.

*Demonstr.*

*def.* 6.*p.* | $u; t : t2 ; t3.$

2. *p.* | $u; t - u : t2 ; t3 - t2.$

Ergo $t3 - t2$, est toties $t2$, quoties est $t - u$: idest, quoties relinquitur ipse numerus $t$, vnitate dempta. Sed cuiusque numeri tot sunt abscissionea, quotus ipse relinquitur,

quitur, vnitate dempta: nam binarij, vna tantùm est abscissio, qua vnitas abscinditur; ternarij, duæ, quibus vnitas, & binarius abscinduntur; & sic deinceps: ergo $t3 - t2$, est toties $t2$, quot sunt ipsius $t$ abscissiones.

Pro singulis autem abscissionibus.

6. p. | $a2 + 2ar + r2 : t2$.
| Ergo pro omnibus.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 : t3 - t2$.
| Ergo communiter addendo $t2$.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 + t2 : t3$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theorema* 14. *Prop.* 14.

Tota quælibet, est æqualis quadratrici, in primo latere, in basi proximè minùs ordinata iacenti, vnà cum alijs massis, in primo latere, in basibus inferioribus, & vertice, acceptis aliqualiter, & vnitate.

*Hypoth.*

Esto tota tertia $t3$.

Dico $t3$, esse æqualem quadratrici in primo latere, in secunda basi, vna cum alijs, &c.

*Demonstr.*

4. h. | $t3 : O.3a2$, vna cum alijs, &c.
def. 8. p. | $a2$ est in primo latere in secunda basi tabulæ proportionalium.
def. 11. p | $a2$ est ibidem in tabula nominum.
def. 9. 2. | $O.a2$ est ibidem in tabula speciosa.

def.11.2. | O.a2 est ibidem in tabula subquadratrice.
def.13.2 | O.3a2 est ibidem in tabula quadratrice.
| t3 est æqualis quadratrici, in primo latere, in secunda basi, vna cum alijs, &c. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theorema* 15. *Prop.* 15.

QVælibet subquadratrix, in primo latere, vna cum tota æque ordinata, atque sua basis, est æqualis subquadratrici, in secundo latere, in sua basi iacenti, vna cum massis, in secundo latere, in basibus inferioribus, acceptis aliqualiter, & tota.

*Hypoth.*

Esto subquadratrix *O.a3*, in primo latere, in tertia basi. Dico *O.a3*, vnà cum tota tertia, æqualem esse subquadratrici, in secundo latere, in tertia basi iacenti, vna cum alijs, &c.

*Præpar.*

Assumatur species, in secundo latere, in quarta basi, secunda, & quartultima, *O.a3r*.

*Demonstr.*

| *O.a3r* incrementa sunt ęqualia.
2. *h.* | *O.a3*, vna cum &c: *O.3a2r*, vna cum alijs &c.
7. *p.* | *a2r* est secunda in tertia basi tabulæ proportionalium.
def.11.p. | *3a2r* est ibidem in tabula nominum.
def.11.2. | *O.3a2r* est ibidem in tabula subquadratrice.

*O.a3*,

| O.a3, vna &c. est æqualis subquadratrici, in secundo latere, in tertia basi, vna cum alijs, &c.
| Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 16. Prop. 16.*

SI aliquot quantitatum, secunda ad tertiam, fuerit sicut prima cum vltima ad secundam dempta vltima; & tertia ad quartam, sicut prima cum dupla vltima ad secundam dempta dupla vltima; & quarta ad quintam sicut prima cum tripla vltima ad secundam dempta tripla vltima; & sic deinceps vsque ad vltimam: erit prima cum secunda ad secundam cum tertia, sicut prima cum vltima ad secundam; & secunda cum tertia ad tertiam cum quarta, sicut prima cum dupla vltima ad secundam dempta vltima; & tertia cum quarta ad quartam cum quinta, sicut prima cum tripla vltima ad secundam dempta dupla vltima; & sic deinceps.

*Hypoth.*

Sint aliquot quantitates $a, b, c, d, e$.

$b; c : a+e; b-e.$

$c; d : a+2e; b-2e.$

$d; e : a+3e; b-3e.$

Dico $a+b; b+c : a+e; b.$

*Demonstr.*

*hypoth.* | $a+e; b-e : b; c.$
| conuertendo, componendo, & permutando.

 $a+b$

2. p. | $a+b;\ b+c:\ a+e;\ b$. Quod &c.
Dico $b+c;\ c+d:\ a+2e;\ b-e$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $b;\ c:\ a+e;\ b-e$. |
| 2. p. | $b+c;\ c:\ a+b;\ b-e$. |
| *hypoth.* | $c;\ d:\ a+2e;\ b-2e$. |
| 2. p. | $c;\ c+d:\ a+2e;\ a+b$. |
| p. p. | $b+c;\ c+d:\ a+2e;\ b-2e$. Quod &c. |

Dico $c+d;\ d+e:\ a+3e;\ b-2e$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $c;\ d:\ a+2e;\ b-2e$. |
| 2. p. | $c+d;\ d:\ a+b;\ b-2e$. |
| *hypoth.* | $d;\ e:\ a+3e;\ b-3e$. |
| 2. p. | $d;\ d+e:\ a+3e;\ a+b$. |
| p. p. | $c+d;\ d+e:\ a+3e;\ b-2e$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 17. *Prop.* 17.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam fuerit,ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: fuerit autem & prima æqualis vltimæ: erunt totidem quantitates & vna amplius, prima ſeorſim, prima cum ſecunda, ſecunda cum tertia, tertia cum quarta, & deinceps binę aggregatæ, & demum ſeorſim vltima; quarum ſecunda ad tertiam, eſt vt prima cum vltima ad ſecundam

dempta

dempta vltima; & tertia ad quartam, vt prima cum dupla vltima ad secundam dempta dupla vltima; & sic deinceps vsque ad vltimam.

*Hypoth.*

Sint tres quantitates $a$, $b$, $c$, quarum
$b ; c : a + c ; b - c.$
$a : c.$

Dico quatuor quantitates esse $a, a + b, b + c, c$, quarum
$a + b ; b + c : a + c ; a + b - c.$

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *16.b.* | $a + b ; b + c : a + c ; b.$ |
| *hypoth.* | $a : c.$ |
| | $a + b - c : b.$ |
| | $a + b ; b + c : a + c ; a + b - c.$ Quod &c. |

Dico $b + c ; c : a + 2c ; a + b - 2c.$

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $b ; c : a + c ; b - c.$ |
| *2.p.* | $b + c ; c : a + b ; b - c.$ |
| *hypoth.* | $b + c : a + b.$ |
| | $c : b - c.$ |
| | $2c : b.$ |
| | $a + 2c : a + b.$ |
| | $a + b - 2c : b - c.$ |
| | $b + c ; c : a + 2c ; a + b - 2c.$ Quod &c. |

Quare &c.

Theor.

*Theor.* 18. *Prop.* 18.

IN vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prior quantitas ad posteriorem vicinam, est vt ordo prioris à prima, ad ordinem posterioris ab vltima.

*Demonstr.*

Quoniam in secunda basi tabulæ multiplicium, sunt tres quantitates, quarum secunda ad tertiam, est vt prima cum tertia ad secundam dempta tertia; & prima est æqualis tertiæ; & in tertia basi, sunt
*def.10.p.*
ordinatæ quatuor quantitates ex secunda basi desumptæ, prima seorsim, prima & secunda, secunda & tertia, & tertia seorsim: ergo etiam in tertia
*17. b.*
basi, secunda quãtitas ad tertiam, est vt prima cum quarta ad secundam dempta quarta; & tertia ad quartam, est vt prima cum dupla quarta, ad secundam dempta dupla quarta: & sic deinceps ostendetur in singulis basibus.

Est autem in vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prima quantitas vnitas, & vltima vnitas: &
*def.10.p*
*def.p.p.*
secunda quantitas est ordo basis, idemque ordo ipsius quantitatis ab vltima. Ergo in quarta basi, prima quantitas, quæ est quintultima, ad secũdam, quæ est quartultima, est vt vnitas ad quaternariũ: secunda ergo ad triultimam, est vt binarius ad ternarium; tertia ad penultimam, vt ternarius ad binarium; quarta ad vltimam, vt quaternarius ad vnitatem. Similiter ostendetur in singulis basibus. Quare &c.

*Theor.*

*Theor.* 19. *Prop.* 19.

PRoportionalium, & multiplicium tabulis congruentibus, quæque proportionalis, habet numeros denominatores, reciprocè proportionales, vt in ſuis cornibus multiplices.

*Demonſtr.*

Proportionalium aſſumatur bitertia, cuius denominatores binarius, & ternarius. Eſt autem bitertia in quinta baſi quarta tritultima: cuius cornua ſunt in quarta baſi, alterum in quarto, alterum in tritultimo latere: ideſt alterum cornu eſt, in quarta baſi, quarta quantitas; alterum, tritultima. Sed in quarta baſi, quarta eſt penultima, & tritultima eſt tertia: & in tabula multiplicium, tertia ad penultimã, eſt vt ternarius ad binarium: ergo cum bitertiæ denominatores ſint, prior binarius, & poſterior ternarius; eiuſdem in cornibus multiplices reciprocè ſunt proportionales, prior ad poſteriorem, vt ternarius ad binarium. Quod &c.

7. *p.* *def.p.p.* *def.p.p.* 18. *b.*

Quare &c.

*Theor.* 20. *Prop.* 20.

IN tabula ſpecierum, in eadem baſi, vicinæ ſpecies, multiplicatæ per numeros ſuorum ordinum, prioris à prima, & pòſterioris ab vltima, ſunt æquales, additis tamen vtrimque maſſis, in inferioris ordinis baſibns, & in earumdem

dem lateribus, versus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis minùs ordinatis, quàm sit ipsa basis.

*Hypoth.*

Sint species in quinta basi, secunda quintultima, & tertia quartultima.

Dico duplam secundam quintultimam, æqualem esse quadruplæ tertiæ quartultimæ, additis tamen vtrimque alijs &c.

*Præpar.*

6. p. Assumatur, in sexta basi, species tertia quintultima, cuius denominatores numeri, quaternarius, & binarius.

*Demonstr.*

Tertiæ & quintultimæ speciei æqualia sunt incrementa:
2. h. alterum ex massis compositum in tertio latere, multiplicatis per numeros quartæ basis multiplicium, quaternarium, & reliquos; quarum vna est in quinta basi quartultima, per quaternarium multiplicata: alterum ex massis in quintultimo latere,
2. h. multiplicatis per numeros secundæ basis multiplicium, nempè binarium; quarum vna est, in quinta basi, secunda, multiplicata per binarium: & reliquæ massæ, in vtroque incremento, sunt inferiores, & demum totæ inferiores, quàm quinta. Ergo dupla secunda quintultima, est æqualis quadru-

dru-

druplæ tertiæ quartultimæ, additis vtrimque alijs &c. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 21. Prop. 21.*

IN tabula subquadraticum, in eadem basi, subquadratrices vicinæ sunt æquales, additis tamen vtrimque massis, in inferioris ordinis basibus, & in earumdem lateribus, versus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis, minùs ordinatis, quàm sit ipsa basis. Similiter & vicinæ quadratrices sunt æquales, additis tamen &c.

*Hypoth.*

Sint subquadratrices, in quinta basi, vicinæ, producta ex secunda quintultima specie per secundum quintultimum multiplicem, & producta ex tertia quartultima specie, per tertium quartultimum multiplicem, *O.5a4r*, & *O.10a3r2*.

Dico *O.5a4r*, additis &c: *O.10a3r2*, additis &c.

*Præpar.*

Assumatur, in sexta basi, species tertia quintultima, cuius denominatores, quaternarius, & binarius, nempè *O.a4r2*: quibuscum numeris, reciprocè proportionales sunt multiplices, in eiusdem speciei cornibus iacentes, 5 ad 10. Fiat itaque, vt 2 ad 5, ita *O.2a4r*, vna cum alijs &c. ad *O.5a4r*, vna cum alijs &c. item vt 4 ad 10, ita *O.4a3r2*, vnà cum alijs &c. ad *O.10a3r2*, vna cum alijs &c.

19.b.

post.vn.

 *Demonstr.*

*Demonstr.*

20.h. O.2a4r, vna cum alijs &c: O.4a3r2, vna cũ alijs &c.
2.p. O.2a4r, vna cum alijs &c; O. 4a3r2, vna cum &c:
O.5a4r, vna cum &c; O.10a3r2, vna cum &c.
9.5. O.5a4r, vna cum &c: O.10a3r2, vna cum &c.
Quod &c.

Dico O.30a4r, vna cum &c: O.60a3r2, vna cum &c.

*Præpar.*

post.vn. O.5a4r, vna cum &c. & O.10a3r2, vna cum &c.
sextuplicẽtur, & fiant O30a4r, vna cum &c. &
O.60a3r2. vna &c.

*Demonstr.*

sup. O.5a4r, vna &c: O.10a3r2, vna &c.
9.5. O.30a4r. vna &c: O.60a3r2, vna &c. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 22. *Prop.* 22.

QVælibet quadratrix, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

*Demonstr.*

Patet inductione per 5.h.

21.h. Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi in eadem basi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum basium speciebus, aliqualiter acceptis, & totis. Et quadratrix vicina, alte-
11.h. ri vicinæ est æqualis, additis vtrimque alijs infe-

rio-

15. b. riorum basium speciebus, & totis: & demum primæ quadratrici eiusdem basis: & prima quadra-
14. b. trix vna cum alijs primi lateris quadratricibus inferiorum basium, & vnitate, est æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm sit ipsa basis. Similiter
sup. aliæ inferiorum basium species, alijs speciebus, & demum totis, sunt æquales, non plus ordinatis,
5. b. quàm sit basis quadratricis primò sumptæ. Quare demum quadratrix primò sumpta, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis, demptis, additisque aliqual ter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

---

*Theor. 23. Prop. 23.*

IN tabula multiplicium, summa numerorum cuiusque basis, est tota potestas binarij, quotus est ordo basis.

*Demonstr.*

Nam in tabula proportionalium, si rationalis, & radices
def. 8. p. fuerint æquales inter se: etiam reliquæ omnes quantitates, & rationali, & radicibus, & ad inuicem æquales erunt. quia ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, & secum ipsa composita, semper est æqualitas. Quare si rationalis, & radices fuerint vnitates: omnes proportionales erunt
def. 11. p. vnitates. eritque tabula nominum, eadem, quæ
def. 10. p. tabula multiplicium: quia vnitas non multiplicat et cuiusque basis nominum summa, eadem erit

8. p. quæ ſumma eiuſdem baſis multiplicium. Sed cuiuſque baſis nominum ſumma eſt poteſtas aggregati radicum, æqueordinata cum baſi. Ergo cuiuſque baſis multiplicium ſumma, eſt poteſtas aggregati vnitatum, ideſt, binarij, æqueordinata cum baſi.

*Theor.* 24. *Prop.* 24.

POteſtas binarij multiplicata per ſuum ordinis numerum, minor eſt æqueordinata poteſtate ternarij.

*Hypoth.*

Eſto binarius $b$, ternarius $t$. Conſtat $b$, minorem eſſe, quàm $t$.

Dico $2b2$, minorem eſſe, quàm $t2$.
$3b3$, minorem, quàm $t3$.
$4b4$, minorem quàm $t4$. Et deinceps.

*Demonſtr.*

def. 8. p. $t$; $b$: $t2$; $tb$: $tb$; $b2$: $t2 - tb$; $tb - b2$.
& 2. p. $t$, $b$, ſunt numeri inter ſe primi.
23. 7. $t$, $b$, ſunt minimi in ſua ratione.
$t2 - tb$, non eſt minor, quàm $t$.
$tb - b2$, non eſt minor, quàm $b$.
$t2 - b2$, non eſt minor quàm $t+b$.
hypoth. $b$, eſt minor, quàm $t$.
$2b$, eſt minor, quàm $t+b$.
$2b$, eſt minor, quàm $t2 - b2$.
hypoth. $2$, eſt $b$.

$2b$,

2b, est b2.
b2, est minor, quàm t2--b2.
2b2, est minor, quàm t2. Quod &c.
2b2, est b3.
b3, est minor, quàm t2.
3b3, est minor, quàm 3t2.
3t2, est t3.
3b3, est minor, quàm t3. Quod &c.
3b4, est minor, quàm 2t3.
*sup.* b3, est minor, quàm t2.
*hypoth.* b, est minor, quàm t.
b4, est minor, quàm t3.
4b4, est minor, quàm 3t3.
3t3, est t4.
4b4, est minor, quàm t4. Quod &c.
Et similiter deinceps ostendetur in infinitum.
Quare &c.

---

*Theorema 25. Prop. 25.*

IN tabula multiplicium, quisque numerus multiplicans numerum vnitate maiorem, quàm sit ordo suæ basis, facit numerum minorem tota potestate ternarij, quotus est numerus multiplicatus.

*Hypoth.*

Esto, numerus a, in tabula multiplicium, in quinta basi: & esto ternarius t.

Dico 6a, minorem esse, quam t6.

*Præpar.*

*Præpar.*

Accipiatur binarius *b*.

*Demonstr.*

32. *b.* | Numerus *a*, & alij quintæ basis, componunt *b5*.
def.6.p. | Ergo *a*, minor est, quàm *b5*. Sed *b5*, minor est, quàm *b6*. Ergo *a*, multò minor est, quàm
24. *b.* | *b6*. Ergo *6a*, minor est quàm *6b6*. Sed *6b6*, minor est, quàm *t6*. Ergo *6a*, minor est quàm *t6*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 26. Prop. 26.*

QVælibet quadratrix, pro radice binario, minor est, quàm sesquitota; maior, quàm semitota, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis. Porrò quadratrix iacens in vertice tabulæ, est æqualis semitotæ.

*Hypoth.*

Esto, pro radice binario, quælibet quadratrix *a*, in quarta basi.

Dico *a* maiorem esse, quàm *m5*; & minorem, quàm *q5*.

6. *b.* | Porrò constat quod *O.u*, pro quacunque radice, est æqualis ipsi *m*.

*Præpar.*

def.8.*b*. | Pro radice binario, vnica tantum est abscissio, qua vnitas abscinditur, & vnitas relinquitur: &
def.8.*p*. | vnica tabula proportionaliũ, in qua omnes pro-

por-

def.8.b. portionales sunt vnitates: & synonymæ proportionales solitariæ: vnde tabula specierum est ea-
def.10.b. dem, quæ proportionalium ex vnitatibus. Dein-
def.11.p. de vnica est tabula nominum, eadem, quæ multi-
def.11.b. plicium: vnde tabula subquadratricum, eadem est, quæ nominum, & multiplicium. Accipiatur itaque subquadratrix *b*, in quarta basi, quadratrici *a*, synonyma.

*Demonstr.*

præpar. *b*, est in tabula multiplicium, in quarta basi.
def.13b. *a* : 5 *b*.
def.19.b. pro binario, *m*, est vnitas.
def.6.p. *m* 5, est vnitas.
def.10.p 5 *b*, est maior vnitate.
*a*, est maior, quàm *m* 5. Quod &c.
def.18.b Pro binario, *q*, est ternarius.
25.b. 5 *b*, est minor, quàm *q* 5.
*a*, est minor, quàm *q* 5. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 27. Prop. 27.*

QVælibet potestas à binario, maior est numero sui ordinis.

*Hypoth.*

Esto binarius *b*.

*Demonstr.*

Vnitas est minor, quàm *b*. ergo binarius, minor est, quàm

quàm 2 $b$: sed $2b$: est $b2$: ergo binarius, minor est, quã $b2$. Ergo vnitas, multò minor est, quàm $b2$. Ergo ternarius, minor est, quàm $2b2$. Sed $2b2$, est $b3$. Ergo ternarius, minor est, quàm $b3$. Et sic deinceps ostendetur, quòd potestas à binario, maior est, quàm sui ordinis numerus.

---

*Theor.* 28. *Prop.* 28.

QVælibet quadratrix primi lateris, pro radice binario, minor est; quàm potestas binarij, vnitate plus ordinata, quàm sit eius basis.

*Hypoth.*

Esto, in primo latere, in quarta basi, quadratrix $a$, pro radice binario: & esto binarius $b$.

Dico $a$, minorem esse, quàm $b5$.

*Præpar.*

Accipiatur in primo latere, in quarta basi, subquadratrix $c$, pro radice binario.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| ex 26. b | $c$ : $a$. |
| def. 11. b | $a$ : $5c$. |
| | $a$ : 5. |
| 27. b. | 5, minor est, quàm $b5$. |
| | $a$, minor est, quàm $b5$. Quod &c. |

Quare &c.

---

Theor.

*Theor. 29. Prop. 29.*

'iuslibet quadratricis, primi vel vltimi lateris, incrementum, minus est incremento totæ, vnitate dinatæ, quàm sit eius basis: & quælibet quadratrix, vel vltimi lateris, minor est quàm tota, vnitate dinata: & sesquiquadratrix, minor est quàm ses-

*Meth. Demonstr.*

ı proposita, oportet primùm demonstrare, in prio- asibus tabulæ, deinde in posterioribus.

:o *O.2a* incrementum, minus esse incremento *t2*: *a*, minorem esse, quàm *t2*: & sesqui-*O.2a*, mi- esse, quàm *q2*.

*Demonstr.*

*O.2a* incrementum est *O.2+2*.
*t2* incrementum est *2t+u*.
*O.2*: *2t—2*.
*O.2+2*: *2t*.
*O.2+2*, minor est, quàm *2t+u*.
*O.2a* incrementum, minus est incremento *t2*. Quod &c.
*O.2a*, pro binario, minor est, quàm *t2*.
*O.2a*, pro ternario, minor est, quàm *t2*.

Similiter, pro quaternario, & pro singulis numeris demonstrabitur, quòd *O.2a* minor est, quàm *t2*: & sesqui-*O.2a*, minor est, quàm *q2*. Quod &c.

Dico $O.3a2$ incrementum, minus esse incremento $t3$: & $O.3a2$, minorem esse, quàm $t3$: & sesqui-$O.3a2$, minorem esse, quàm $q3$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 2. *h.* | $O.3a2$ incrementum, est $O.6a+O.3+3$. |
| 8. *p.* | $t3$ incrementum, est $3t2+3t+u$. |
| *sup.* | $O.6a$, minor est, quàm $3t2$. |
| *ex sup.* | $O.3+3$, minor est, quàm $3t+u$. |
| | $O.3a2$ incrementum, minus est incremento $t3$. Quod &c. |
| 28. *h.* | $O.3a2$, pro binario, minor est, quàm $t3$. |
| | $O.3a2$, pro ternario, minor est quàm $t3$: necnon pro alio quolibet numero: & sesqui-$O.3a2$, minor est, quàm $q3$. Quæ &c. |

Dico $O.4a3$ incrementum, minus esse incremento $t4$: & $O.4a3$, minorem esse, quàm $t4$: & sesqui-$O.4a3$, minorem, quàm $q4$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 2. *h.* | $O.4a3$ incrementum, est $O.12a2+O.12a+O.4+4$. |
| 8. *p.* | Incrementum $t4$, est $4t3+6t2+4t+u$. |
| *sup.* | $O.12a2$, minor est, quàm $4t3$. |
| *sup.* | $O.12a$, minor est, quàm $6t2$. |
| *ex sup.* | $O.4+4$, minor est, quàm $4t+u$. |
| | Incrementum $O.4a3$, minus est incremento $t4$. Quod &c. |
| 28. *h.* | $O.4a3$, pro binario, minor est, quàm $t4$. |

$O.4a3$,

443, pro ternario, minor est, quàm $t4$: necnon quaternario, & pro alijs deinceps numeris: & sesqui-3, minor est, quàm $q4$. Quæ &c.
Similiter ostendetur de omnibus primi, & vltimi lateris quadratricibus.
Quare &c.

---

*Theor. 30. Prop. 39.*

Cuiuslibet quadratricis incrementum, maius est incremento semitotæ, vnitate plus ordinatæ, quàm eius basis; & minus est incremento sesquitotæ, pariter plus ordinatæ. Deinde quælibet quadratrix, maior est, quàm prædicta semitota; & minor, quàm prædicta sesquitota.

*Meth. Demonstr.*

Quatuor proposita primùm demonstrare oportet, in prioribus basibus tabulæ, deinde in posterioribus.

Dico incrementum $O.2a$; maius esse, incremento $m2$; & minus esse, incremento $q2$: & $O.2a$, maiorem esse, quàm $m2$; minorem, quàm $q2$.

*Demonstr.*

2. b. | Incrementum $O.2a$, est $O2+2$.
8. p. | Incrementum $m2$, est $2m+u$.
8. p. | Incrementum $q2$, est $2q+u$.
7. b. | $O.2 : 2m$.
| $O.2+2$, est maior, quàm $2m+u$.
| Incrementum $O.2a$, est maius incremento $m2$.

Quod &c. L 2 $O.2$

def.19. & 18.h. | $O.2+2 : 2m+2 : 2t.$
$O.2+2$, est minor, quàm $2q$.
$O.2+2$, est minor, quàm $2q+u$.
Incrementum $O.2a$, est minus incremento $q2$.
Quod &c.

26. b. | $O.2a$, pro binario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$.
$O.2a$, pro ternario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$: item pro quaternario, & pro reliquis numeris. Quod &c.

Dico $O3a2$ incrementum, maius esse incremento $m3$; minus incremento $q3$: & $O.3a2$, maiorem esse, quàm $m3$; minorem, quàm $q3$.

*Demonstr.*

6. b. | Incrementum $O.3a2$, est $O.6a+O.3+3$.
8. p. | Incrementum $m3$, est $3m2+3m+u$.
8. p. | Incrementum $q3$, est $3q2+3q+u$.
sup. | $O6a$, est maior, quàm $3m2$.
sup. | $O.3 : 3m$.
$O.3+3$, maior est. quàm $3m+u$.
Incrementum $O.3a2$, est maius incremento $m3$.
Quod &c.
sup. | $O.6a$, est minor, quàm $3q2$.
sup. | $O.3+3$, est minor, quàm $3q+u$.
Incrementum $O.3a2$, est minus incremento $q3$.
Quod &c.
26. b. | $O.3a2$, pro binario, est maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.

$O.3a2$,

$a2$, pro ternario, eſt maior, quàm $m3$; minor; $q3$: necnon pro quaternario, & reliquis deinceps is. Quod &c.

o $O.6ar$ incrementum, maius eſſe incremento $m3$; incremento $q3$: & $O.6ar$, maiorem eſſe, quàm minorem, quàm $q3$.

*Demonſtr.*

Incrementum $O6ar$, eſt $O.6r+6t$.

Incrementum $m3$, eſt $3m2+3m+u$.

Incrementum $q3$, eſt $3q2+3q+u$.

$O.6r$, maior eſt, quàm $3m2$.

$6t$, maior eſt, quàm $3m+u$.

Incrementum $O.6ar$, maius eſt incremento $m3$. Quod &c.

$O2r+2t$, minor eſt, quàm $q2$.

$O6r+6t$, minor eſt, quàm $3q2+3q+u$.

Incrementum $O.6ar$, minus eſt incremento $q3$. Quod &c.

$O.6ar$, pro binario, eſt maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.

$O.6ar$, pro ternario, & pro reliquis numeris, eſt maior, quàm $m3$, minor, quàm $q3$. Quod &c.

o $O.4a3$ incrementum, maius eſſe incremẽto $m4$; ncremento $q4$: & $O.4a3$, maiorem eſſe, quàm $m4$; m, quàm $q4$.

De-

*Demonstr.*

2.b. Incrementũ $O.4a3$, est $O.12a2+O.12a+O.4+4$.
8.p. Incrementum $m4$, est $4m3+6m2+4m+u$.
8.p. Incrementum $q4$, est $4q3+6q2+4q+u$.
sup. $O.12a2$, maior est, quàm $4m3$.
sup. $O.12a$, maior, quàm $6m2$.
sup. $O.4:4m$.
4 maior, quàm $u$.
Incrementum $O.4a3$, maius incremento $m4$. Quod &c.
sup. $O.12a2$, minor est, quàm $4q3$.
sup. $O.12a$, minor, quàm $6q2$.
sup. $O.4+4:4m+4:4t$.
$O.4+4$, minor est, quàm $4q+u$.
Incrementum $O.4a3$, minus incremento $q4$. Quod &c.
26.b. $O.4a3$, pro binario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$.
$O.4a3$, pro ternario, & pro alio quolibet numero, maior est, quàm $m4$; minor quã $q4$. Quod &c.

Dico $O.12a2r$ incrementum, maius esse incremento $m4$; minus incremento $q4$: & $O.12a2r$, maiorem esse, quàm $m4$; minorem, quàm $q4$.

*Demonstr.*

2.b. Incrementum $O.12a2r$, est $O.24ar+O.12r+12r$.
8.p. Incrementum $m4$, est $4m3+6m2+4m+u$.

In-

Incrementum $q4$, est $4q3+6q2+4q+u$.

$O.24ar$, maior est, quàm $4m3$.

$O.12r$, maior, quàm $6m2$.

$12t$, maior, quàm $4m+u$.

Incrementum $O.12a2r$, maius est incremēto $m4$. Quod &c.

$O.24ar$, minor est, quàm $4q3$.

$O.12r+12t$, minor, quàm $6q2+4q+u$.

Incrementum $O.12a2r$, minus incremento $q4$. Quod &c.

$O.12a2r$, pro binario, maior, quàm $m4$; minor est, quàm $q4$.

$O.12a2r$, pro ternario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$; necnon quo alio quolibet numero. Quod &c.

o $O.5a4$, incrementum, maius esse incremēto $m5$; ncremento $q5$: & $O.5a4$, maiorem esse, quàm $m5$; :m, quàm $q5$.

*Demonstr.*

Incrementum $O.5a4$, est $O.20a3+O.30a2+O.20a+O.5+5$.

Incrementum $m5$, est $5m4+10m3+10m2+5m+u$.

Incrementum $q5$, est $5q4+10q3+10q2+5q+u$.

$O.20a3$, maior est, quàm $5m4$.

$O.30a2$ maior est, quàm $10m3$.

$O.20a$, maior est, quàm $10m2$.

*sup.* | $O.5 + 5$, maior est, quàm $5m + u$.
Incrementum $O.5a4$, maius est incremento $m5$. Quod &c.

*sup.* | $O.20a3$, minor est, quàm $5q4$.

*sup.* | $O.30a^2$, minor est, quàm $10q3$.

*sup.* | $O.20a$, minor est, quàm $10q^2$.

*sup.* | $O.5 + 5$ minor est, quàm $5q + u$.
Incrementum $O.5a4$, minus est incremento $q5$. Quod &c.

26.*b.* | $O.5a4$, pro binario, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.
$O.5a4$, pro ternario, & reliquis numeris, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Dico $O.20a3r$, incrementum, maius esse incremento $m5$; minus incremento $q5$: & $O.20a3r$, maiorem esse, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

*Demonstr.*

2. *b.* | $O.20a3r$ incrementum, est $O.60a2r + O.60ar + O.20r + 20t$.

8. *p.* | Incrementum $m5$, est $5m4 + 10m3 + 10m2 + 5m + u$.

8. *p.* | Incrementum $q5$, est $5q4 + 10q3 + 10q2 + 5q + u$.

*sup.* | $O.60a2r$, maior est, quàm $5m4$.

*sup.* | $O.60ar$, maior est, quàm $10m3$.

*sup.* | $O.20r$, maior est, quàm $10m2$.
$20t$, maior est, quàm $5m + u$.
Incrementum $O.20a3r$, maius est incremento $m5$. Quod &c.

O.60

$O.6oa2r$, minor est, quàm $5q4$.

$O.6oar$, minor est, quàm $10q3$.

$O.2or+2ot$, minor est, quàm $10q2+5q+u$.

Incrementum $O.2oa3r$, minus est incremento $q5$. Quod &c.

$O.2oa3r$, pro binario, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.

$O:2oa3r$, pro ternario, & reliquis numeris, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

) $O.3oa2r2$ incrementum, maius esse incremen- minus incremento $q5$: & $O.3oa2r2$, maiorem àm $m5$; minorem, quàm $q5$.

*Demonstr.*

Incrementum $O.3oa2r2$, est $O.6oar2+O.3or2+3ot2$.

Incrementum $m5$, est $5m4+10m3+10m2+5m+u$.

Incrementum $q5$, est $5q4+10q3+10q2+5q+u$.

$O.6oar2$, maior est, quàm $5m4$.

$O.3or2$, maior est, quàm $10m3$.

$O.3ot2$, maior est, quàm $10m2+5m+u$.

Incrementum $O.3oa2r2$, maius est incremento $m5$. Quod &c.

$O.6oar2$, minor est, quàm $5q4$.

$O.3or2+3ot2$, minor est, quàm $10q3$.

Incrementum $O.3oa2r2$, minus est incremento $q5$. Quod &c.

26. b. O.3oa2r2, pro binario, maior eſt, quàm *m5*; minor, quàm *q5*.

*O.3oa2r2*, pro ternario, alioue quolibet numero, maior eſt, quàm *m5*; minor, quàm *q5*. Quod &c.

Similiter oſtendetur de omnibus quadratricibus in infinitum, hac ſemper methodo ſeruata.

Quare &c.

---

*Theor.* 31. *Prop.* 31.

QVælibet quadratrix eſt ęqualis ſemitotæ vnitatę plus ordinatæ, additis, demptiſque ſemitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. *Demonſtr.*

Patet inductione per *6.h.*

22. b. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſq; aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. 6. b. Tota verò vnitate plus ordinata, eſt æqualis ſemitotæ pariter ordinatæ, vnà cum ſemitotis non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitate: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt æquales ſemitotis, non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitati.

Quare quælibet quadratrix eſt æqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ additis &c.

---

*Theor.*

*Theor. 32. Prop. 32.*

Qualibet quadratrix est æqualis ſeſquitotæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque ſeſquitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius

*Demonſtr.*

…t inductione per 7.*h*.

Deinde ſic. Qualibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quã ſit eius baſis. Tota verò, vnitate plus ordinata, æqualis eſt ſeſquitotæ, pariter ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis non plus ordinatis: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt ſeſquitotis additis, & ſubtractis, non plus ordinatis æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis ſeſquitotæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis, non plus ordinatis, quam ſit eius baſis.

---

*Theor. 33. Prop. 33.*

…ælibet quadratrix media, eſt æqualis quadratrici, …n eadem baſi, primæ, vna cum alijs primi lateris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, …ratrici.

*Demonſtr.*

…inductione per 8.*h*.

22. *b.* Deinde sic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis, demptis, additiſue alijs totis, aliqualiter acceptis,
14. *b.* non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. Tota auté vnitate plus ordinata, eſt æqualis quadratrici primæ, in æqueordinata baſi iacenti, vna cum alijs ſpeciebus, in primo latere, in inferioribus baſibus, aliqualiter acceptis. Et reliquæ inferiores totæ, ſimiliter inferioribus quadratricibus, & ſpeciebus ſunt æquales, aliqualiter acceptis. Quare quælibet quadratrix media, eſt æqualis primæ, in eadem baſi, iacenti quadratrici, vnà cum alijs primi late-
2. *p.* ris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

---

*Theor.* 34. *Prop.* 34.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per *9.h.*

21. *b.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum baſiũ ſpeciebus, aliqualiter acceptis, & totis non plus ordinatis, quàm ſit
22. *b.* ipſa baſis. Sunt autem aliæ inferiorum baſium ſpecies, æquales totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa

ipsa basis, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinę additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis quã sit ipsa basis. Et subquadratrix subquadratrici.

*Theorema 35. Prop. 35.*

Vælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque semitotis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

*Demonstr.*

et inductione per 10. *h.*

Deinde sic. Quælibet quadratrix est æqualis quadratrici, in eadē basi, sibi vicinę, additis vtrimq; totis non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Totæ autem non plus ordinatæ, semitotis non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, sunt æquales. Ergo quælibet quadratrix est æqualis quadratrici in eadem basi sibi vicinæ, additis vtrimque semitotis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

*Theor. 36. Prop. 36.*

ælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque sesquitotis, non ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

De-

*Demonstr.*

Patet inductione per 11.*h*.

34. *b.* Deinde sic. Quælibet quadratrix est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa
7. *b.* basis. Totæ autem, non plus ordinatæ, sesquitotis, non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, sunt æquales. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadē basi, sibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis.
2. *p.* Et subquadratrix, subquadratrici.

---

*Theor.* 37. *Prop.* 37.

Qvælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi, in eadem basi, vicinæ, additis vtrimque primi lateris speciebus, inferiorum basium. Et subquadratrix, subquadratrici.

*Demonstr.*

Patet inductione per 12.*h*.

34. *b.* Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi, in eadē basi vicinę, additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis, quàm sit ipsa basis, aliqua-
14. *h.* liter acceptis. quæ totę, sunt æquales speciebus inferiorū basium, primi lateris, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici sibi in eadem basi vicinæ, additis vtrimq; primi la-
2. *p.* teris speciebus, inferiorum basium. Et subquadratrix, subquadratrici.

---

Pe-

is Mengolus, Illustrissimo D. Fabio Alamanno, Nobili Bononiensi, Domino suo maximè recolendo, beatè viuere.



*E quasi proportionibus, inauditum hucusque Geometricum elementum, ad theoremata, cæteroqui difficillima, facili negotio soluenda, cum instituerim: ex ijs, qui meam scholam ...entarunt, præter te, Iuuenis Illustrissime, ne... m habeo satis dispositum; qui rem subtilissi... valeat intelligere. Cumque verear, si forte ... intelligi, quod legendum omnibus propono; ...riùs ipse oretenus, alicui eius doctrinæ satis ...i, meam sententiam explicuerim: apud te ...tor accessi; vt dignareris (licet vacationum... ...re admodùm necessario) ruralibus partim ...is, partim negotijs quidquam detrahere; pri... ...que meis lucubrationibus auditor interuenire. ...ua benignitate statim, quod postulabam, im-* ple-

*pleuisti : & concessum tibi diuinitus intellectum subtilissimum, inuentis meis, ea intentione adhibuisti; vt & me ipsum inuentorem, & praelectorem, in plurimis etiam praeuenires. Plurimas itaque tibi primùm gratias profiteor: quod tàm humiliter, & liberaliter, me de studijs meis priuatis tecum patiaris communicare. Deinde illas easdem lucubrationes, vnà cum alijs praecedentium elementorum, pleniùs tractatas, praelegendas offero, scriptis praesentibus; antequam totum opus publici iuris esse incipiat: non quasi gratiam redditurus; sed in mei erga te obsequij monimentum.*

*Vale.*

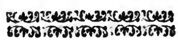


GEO-

# OMETRIÆ SPECIOSÆ

## ELEMENTVM TERTIVM.

### *DEFINITIONES.*





Atio indeterminata determinabilis, quæ in- determinari, poteſt eſſe maior, quam data quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur Quaſi infinita.

Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet, qua- :a determinabilis, dicetur, Quaſi nulla.

Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet ma- :qualitas; & maior, quàm data quælibet minor inæ- s, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi æqua- Vel aliter. quæ poteſt eſſe propior æqualitati, lata quælibet non æqualitas, quatenus talis, dice- ıaſi æqualitas.

Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet ma- ›poſitâ quadam ratione; & maior, quàm data quæ- inor, propoſitâ eâdem ratione, quatenus ita deter-

minabilis, dicetur, Quasi eadem ratio. Vel aliter. quæ potest esse propior cuidam propositæ rationi, quàm data quælibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quasi eadem.

5. Et rationum quasi earundem inter se, termini dicentur, Quasi proportionales.

6. Et quasi æqualitatum, dicentur, Quasi æquales.



Theor.

*Theor. 1. Prop. 1.*

ualium rationum maior, permutando, est maior
ı componendo, & diuidendo, est maior.

*Demonstr.*

Maioris enim rationis antecedens, maior est, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: & dempta quantitate, vt proportionalis relinquatur; permutando, & componendo, & diuidendo, proportionalis erit, & antecedens: eâdemq restituta quantitate, erit antecedens maior, quàm proportionalis, permutatæ, aut compositæ, aut diuisæ proportionalitatis. Quod &c.

e &c.

---

*Theorema 2. Prop. 2.*

ualium rationum maior, conuertendo, est mi-

*Demonstr.*

Nam maioris rationis consequens est minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: factusque conuertendo antecedens, adhuc est minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis. Quod &c.

e &c.

---

*Theor. 3. Prop. 3.*

ualium rationum maior, per conuersionem ratio-
.st minor. N 2 *Hy-*

*Hypoth.*

*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*a*: maior, quàm *b*.
*c*: maior, quàm *d*.

Dico *a*; *a*—*b*: minorem eſſe, quàm *c*; *c*—*d*.

*Demonſt.*

| | |
|---|---|
| *hyp.* | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. |
| *p. b.* | *a*—*b*; *b*: maior, quàm *c*—*d*; *d*. |
| *2. b.* | *b*; *a*—*b*: minor, quàm *d*; *c*—*d*. |
| *p. b.* | *a*; *a*—*b*: minor, quàm *c*; *c*—*d*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 4. *Prop.* 4.

EX maioribus rationibus, ex æquali, maior eſt ratio compoſita: & ex minoribus, minor.

*Hypoth.*

*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.

Dico *a*; *b*,+*e*: *f*: maiorem eſſe, quàm *c*; *d*,+*g*; *h*.

*Præpar.*

*a*; *b*: *i*; *d*.
*e*; *f*: *d*; *l*.
*g*; *h*: *d*; *m*.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| *conſtr.* | *a*; *b*: *i*; *d*. |
| *hypoth.* | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. |
| 13. 5. | *i*; *d*: maior, quàm *c*; *d*. |

*i*: ma-

$i$: maior, quàm $c$.
$e; f: d; l$.
$e; f$: maior, quàm $g; h$.
$d; l$: maior, quàm $g; h$.
$g; h: d; m$.
$d; l$: maior, quàm $d; m$.
$l$: minor, quàm $m$.
$i: l$: maior, quàm $c; m$.
$a; b, + e; f: i; d, + d; l: i; l$.
$c; d, + g; h: c; d, + d; m: c; m$.
$a; b, + e; f$: maior, quàm $c; d, + g; h$. Quod &c.
ire &c.

---

*Theor. 5. Prop. 5.*

Aioris inæqualitatis plus multiplicata ratio, maior eſt, quàm minùs: & minoris, minor.

*Hypoth.*

$a$: maior, quàm $b$.
$a3; b3$: triplicata $a; b$.
$a2; b2$: duplicata $a; b$.
) $a3; b3$: maiorem, quàm $a2; b2$.
3; $a3$: minorem, quàm $b2. a2$.

*Demonſtr.*

$a3; a2: a; u$.
$b3; b2: b; u$.
$a; u$: maior, quàm $b; u$.
$a3; a2$: maior, quàm $b3; b2$.

$a3$;

p. h. | $a3$; $b3$: maior, quàm $a2$; $b2$. Quod &c.
2. h. | $b3$; $a3$: minor, quàm $b2$; $a2$. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor. 6. Prop. 6.*

SI prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: etiam æqueproportionales cum prima, & tertia, ad æqueproportionales cum secunda, & quarta, maiorem habebunt rationem, si prout sibi respondent, ita sumantur.

*Hypoth.*

$a$; $b$: maior, quàm $c$; $d$.
$a$; $c$: $e$; $f$.
$b$; $d$: $g$; $h$.
Dico $e$; $g$: maiorem esse, quàm $f$; $h$.

*Demonstr.*

hypoth. | $a$; $b$: maior, quàm $c$; $d$.
p. h. | $a$; $c$: maior, quàm $b$; $d$.
13. 5. | $e$; $f$: maior, quàm $g$; $h$.
p. h. | $e$; $g$: maior, quàm $f$; $h$. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor. 7. Prop. 7.*

RAtio quasi infinita, conuertendo, est quasi nulla.

*Hypoth.*

Esto ratio $A$ ad $B$, quasi infinita.
Dico conuertendo, $B$ ad $A$, esse quasi nullam.

Pra-

*Præpar.*

ımatur quælibet ratio $c$ ad $d$.

*Demonstr.*

Ratio $A$ ad $B$, maior potest esse, quàm $d$ a $c$: Ergo conuertendo, $B$ ad $A$, minor potest esse, quàm $c$ ad $d$. Ergo $B$ ad $A$, est ratio quasi nulla. Quod &c.

ıre &c.

---

*Theor. 8. Propos. 8.*

Atio quasi infinita, componendo, est quasi infinita: item diuidendo, est quasi infinita.

*Hypoth.*

› ratio $A$ ad $B$, quasi infinita.

o componendo $A+B$ ad $B$, esse quasi infinitam.

*Præpar.*

ımatur quælibet ratio $c$ ad $d$: quod si $c$, est maìm $d$; sit excessus $e$.

*Demonstr.*

Si quidem $c$ est æqualis, vel minor, quàm $d$: patet, quod $A+B$ ad $B$, maior potest esse, quàm $c$ ad $d$. Quòd si $c$ est maior, quàm $d$: quoniam $A$ ad B, maior potest esse, quàm $e$ ad $d$: ergo componendo, $A+B$ ad $B$, maior potest esse, quàm $e+d$ ad $d$: sed $e+d$ est $c$: ergo $A+B$ ad $B$, maior potest esse, quàm $c$ ad $d$. Ergo $A+B$ ad $B$, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Dico

Dico diuidendo $A - B$ ad $B$, rationem esse quasi infinitam. *Demonstr.*

def. 1. | Ratio $A$ ad $B$, potest esse maior, quàm $c+d$ ad $d$:
p. b. | Ergo diuidendo $A - B$ ad $B$, potest esse maior,
def. 1. | quàm $c$ ad $d$. Ergo $A - B$ ad $B$, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 9. Pro. 9.*

RAtio quasi infinita, per conuersionem rationis, est quasi æqualitas.

*Hypoth.*

Esto ratio $A$ ad $B$, quasi infinita.

Dico, per conuersionem rationis, $A$ ad $A - B$, esse quasi æqualitatem.

*Præpar.*

Assumatur quælibet ratio non æqualitas, cuius maior terminus $c$, minor $d$.

*Demonstr.*

def. 1. b. | Ratio $A$ ad $B$, potest maior esse, quàm $c$ ad
3. b. | $c - d$: ergo, per conuersionem rationis, $A$ ad $A - B$, potest minor esse, quàm $c$ ad $d$: & est maior æqualitate: ergo $A$ ad $A - B$, est propior
def. 3. b. | æqualitati, quàm sit proposita ratio $c$ ad $d$: ergo ratio $A$ ad $A - B$, est quasi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 10. Prop. 10.*

Atio quaſi nulla, conuertendo, eſt quaſi infinita.

*Hypoth.*

o ratio *A* ad *B*, quaſi nulla.

:o conuertendo, rationem *B* ad *A*, eſſe quaſi infi-

*Præpar.*

ımatur quælibet ratio *c* ad *d*.

*Demonſtr.*

Ratio *A* ad *B*, minor poteſt eſſe, quàm *d* ad *c*: ergo conuertendo, ratio *B* ad *A*, maior poteſt eſſe, quàm *c* ad *d*: ergo ratio *B* ad *A*, eſt quaſi infinita. Quod &c.

ıre &c.

---

*Theor. 11. Prop. 11.*

ıtio quaſi nulla, componendo, eſt quaſi æqualitas.

*Hypoth.*

ı ratio *A* ad *B*, quaſi nulla.

o componendo, rationem *A+B* ad *B*, eſſe quaſi atem.

*Præpar.*

ımatur quælibet ratio *c* ad *d*, non æqualitas; cuius erminus *c*, minor *d*.

*Demonſtr.*

Ratio *A* ad *B*, poteſt minor eſſe, quam *c—d* ad *d*: ergo conuertendo, *B* ad *A*, poteſt maior eſſe, quam *d* ad *c—d*: ergo componendo *A+B*

3. *h.* ad $A$, poteſt maior eſſe, quàm $c$ ad $c-d$: ergo per conuerſionem rationis $A+B$ ad $B$ poteſt minor eſſe, quàm $c$ ad $d$: & eſt maior æqualitate: ergo
*def.3.h.* go $A+B$ ad $B$, eſt propior æqualitati, quàm $c$ ad $d$: ergo $A+B$ ad $B$, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 12. *Prop.* 12.

EX rationibus quaſi infinitis, ex æquali, quaſi infinitæ ſunt rationes compoſitæ.

*Hypoth.*

$A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, ſunto rationes quaſi infinitæ.

Dico ex æquali, ex $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$ compoſitam, eſſe quaſi infinitam.

*Præpar.*

Aſſumatur $e$ ad $f$. ratio quælibet.

*Demonſtr.*

Quoniam $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, ſunt rationes
*def.1.h.* quaſi infinitæ: poſſunt eſſe $A$ ad $B$, maior, quàm
4. *h.* $e$ ad $f$; & $C$ ad $D$, maior æqualitate. Quare & vtriſque $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, compoſita ratio, poteſt eſſe maior, quàm ex $e$ ad $f$, & ex
7. 5. æqualitate, compoſita; ideſt, quàm ipſa $e$ ad $f$
*def.1.h.* ratio. Quare ex vtriſque $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, compoſita ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.*

*Theor. 13. Prop. 13.*

EX rationibus quaſi nullis, ex æquali, quaſi nullæ ſunt rationes compoſitæ.

*Hypoth.*

*A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunto rationes quaſi nullæ.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *C* ad *D* rationem compoſitam, eſſe quaſi nullam.

*Præpar.*

Aſſumatur quælibet ratio *e* ad *f*.

*Demonſtr.*

Quoniam *A* ad *B*, & *C* ad *D* ſunt rationes
def. 2. h. quaſi nullæ, poſſunt eſſe, *A* ad *B*, minor, quàm *e* ad *f*: & *C* ad *D*, minor æqualitate. Quare
4. h. ex vtriſque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, compoſita ratio, poteſt eſſe minor, quàm ex vtriſque *e* ad *f*,
7. 5. & ex æqualitate compoſita; ideſt, quàm ipſa *e* ad *f*. Quare ex vtriſque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, com-
def. 2. h. poſita ratio eſt quaſi nulla. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 14. Prop. 14.*

RAtio quaſi æqualitas, conuertendo, eſt quaſi æqualitas.

*Hypoth.*

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi æqualitas.

Dico conuertendo, *B* ad *A*, quaſi æqualitatem eſſe.

*Præpar.*

Assumantur duæ quælibet rationes, *c* ad *d*, maior æqualitate: & *e* ad *f*, minor.

*Demonstr.*

Quoniam ratio *c* ad *d*, est maior æqualitate; 
2. *h.* ergo conuertendo, *d* ad *c*, est minor æqualitate: 
2. *h.* & quoniam *e* ad *f*, est minor æqualitate; ergo 
*hypoth.* conuertendo *f* ad *e*, est maior æqualitate. Et 
*def.3.h.* quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas: ergo potest *A* ad *B*, maior esse, quàm *d* ad *c*, & minor, 
2. *h.* quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo potest *B* ad *A*, minor esse, quàm *c* ad *d*, & maior, quàm *e* ad *f*. 
*def.3.h.* Ergo *B* ad *A*, est quasi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 15. Prop. 15.*

RAtio quasi æqualitas, componendo, est quasi dupla.

*Hypoth.*

Esto ratio *A* ad *B*, quasi æqualitas.

Dico componendo *A+B* ad *B*, esse quasi duplam.

*Præpar.*

Assumãtur duæ quælibet rationes *c* ad *d*, maior, quàm dupla: & *e* ad *f*, maior quidem æqualitate, sed minor, quàm dupla.

*Demonstr.*

*constr.* Quoniam *c* ad *d*, est maior, quàm dupla, 
*p. h.* diuidendo, *c—d* ad *d*, est maior æqualitate: & quo-

quoniam $e$ ad $f$, est maior æqualitate, sed minor, quàm dupla; diuidēdo, $e-f$ ad $f$, est minor æqualitate. Et quoniam $A$ ad $B$, est quasi æqualitas; potest $A$ ad $B$, minor esse, quàm $c-d$ ad $d$; & maior, quàm $e-f$ ad $f$. Ergo componendo, potest $A+B$ ad $B$, minor esse, quàm $c$ ad $d$; & maior, quàm $e$ ad $f$. Ergo $A+B$ ad $B$, est quasi dupla. Quod &c.

ıre &c.

*Theor. 16. Prop. 16.*

Ratio quasi æqualitas, diuidendo, est quasi nulla.

*Hypoth.*

› ratio $A$ ad $B$ quasi æqualitas: & esto $A$ maior, $B$.

o diuidendo $A-B$ ad $B$, esse quasi nullam.

*Præpar.*

ımatur quælibet ratio $c$ ad $d$.

*Demonstr.*

Quoniam $A$ ad $B$, est quasi æqualitas; & est $A$ maior, quàm $B$; & $c+d$ maior, quàm $d$: ergo potest $A$ ad $B$ ratio, minor esse, quàm $c+d$ ad $d$: ergo diuidendo potest $A-B$ ad $B$ ratio, minor esse, quàm $c$ ad $d$: ergo $A-B$ ad $B$, ratio est quasi nulla. Quod &c.

re &c.

Theor.

*Theor.* 17. *Prop.* 17.

RAtio quasi æqualitas, per conuersionem rationis est quasi infinita.

*Hypoth.*

Esto ratio quasi æqualitas *A* ad *B*: & esto *A* maior, quàm *B*.

Dico, per conuersionem rationis, *A* ad *A*---*B*, rationem esse quasi infinitam.

*Præpar.*

Assumatur quælibet ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

*Demonstr.*

*hyp.* Quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas; & est *A*
*def.3.h.* maior, quàm *B*; item *c* maior, quàm *c*---*d*: er-
*3.h.* go ratio *A* ad *B*, potest minor esse, quàm *c* ad *c*---*d*: ergo per conuersionem rationis, *A* ad *A*---*B* ratio, potest maior esse, quàm *c* ad *d*: & est maior omnibus, tùm æqualitatis, tùm minoris
*def.p.h.* inæqualitatis rationibus: ergo *A* ad *A*---*B* ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 18. *Prop.* 18.

QVæ eidem sunt quasi æqualia, inter se sunt quasi æqualia.

*Hypoth.*

Sunt *A*, *B*, quasi æqualia: item *B*, *C*, quasi æqualia. Dico *A*, *C*, quasi æqualia esse.

*Præ-*

*Præpar.*

Assumatur quælibet ratio *d* ad *e*, non æqualitas: cuius maior terminus *d*, minor *e*. & inter *d*, *e*, media sumatur *f*.

*Demonstr.*

def.3.h. Quoniam *A*, *B*, sunt quasi æqualia, potest *A*
ad *B*, minus esse, quàm *d* ad *f*: & maius, quàm
*f* ad *d*. Item *B* ad *C* potest minus esse, quàm *f*
4. h. ad *e*, & maius, quàm *e* ad *f*. Ergo ex æquali,
potest *A* ad *C* minus esse, quàm *d* ad *e*; &
def.3.h. maius, quàm *e* ad *d*, ergo *A* ad *C*, quasi est
æqualis. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 19. Propos. 19.*

QVæ eidem sunt quasi eędem rationes, inter se sunt quasi eędem.

*Hypoth.*

*A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: & *C* ad *D*, quasi eadem, quæ *E* ad *F*.

Dico *A* ad *B*, quasi eamdem esse quæ *E* ad *F*.

*Præpar.*

Assumatur quælibet ratio *g* ad *h*, maior, quàm cui propior potest esse *E* ad *F*: & quælibet *i* ad *l*, minor.

*Demonstr.*

def.4.h. Quoniam *C* ad *D*, quasi eadem est, quæ *E* ad
*F*: potest *C* ad *D*, minor esse, quàm *g* ad *h*; &
2. h. maior, quàm *i* ad *l*. Ergo *g* ad *h*, maior est,

quàm

quàm cui propior poteſt eſſe $C$ ad $D$; & $i$ ad $l$,
def. 4. h. minor. Et quoniam $A$ ad $B$, quaſi eſt eadem, quæ $C$ ad $D$: ergo $A$ ad $B$, poteſt eſſe minor,
conſtr. quàm $g$ ad $h$; & maior, quàm $i$ ad $l$. Sed $g$ ad $h$ eſt quælibet aſſumpta, maior, quàm cui propior poteſt eſſe $E$ ad $F$; & $i$ ad $l$, eſt quælibet
def. 4. h. aſſumpta, minor: ergo $A$ ad $B$, eſt quaſi eadem, quæ $E$ ad $F$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 20. Prop. 20.*

QVaſi proportionales, conuertendo, ſunt quaſi proportionales.

*Hypoth.*

Sint quaſi proportionales $A$ ad $B$, vt $C$ ad $D$.

Dico conuertendo, quaſi proportionales eſſe $B$ ad $A$, vt $D$ ad $C$.

*Præpar.*

Sumatur quælibet $e$ ad $f$, maior, quàm cui propior poteſt eſſe $D$ ad $C$: & quælibet $g$ ad $h$,
2. h. minor: & erit conuertendo, ſumpta $f$ ad $e$, minor, quàm cui propior poteſt eſſe $C$ ad $D$; & $h$ ad $g$, maior.

*Demonſtr.*

hypoth. Quoniam $A$ ad $B$, quaſi eſt eadem, quæ $C$
def. 4. h. ad $D$: ergo $A$ ad $B$, poteſt eſſe minor, quàm $h$
2. h. ad $g$; & maior, quàm $f$ ad $e$: ergo conuertendo,

do, *B* ad *A*, poteſt eſſe maior, quàm *g* ad *h*; & minor, quàm *e* ad *f*: ergo *B* ad *A*, quaſi eadem eſt, quæ *D* ad *C*. Quod &c.

*def.4.h.*

Quare &c.

---

*Theor.* 21. *Prop.* 21.

EX quaſi ijſdem rationibus, ex æquali, quaſi eædem ſunt rationes compoſitæ.

*Hypoth.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | | *C* | *D* |
| *E* | *F* | | *G* | *H* |
| *i* | *n* | *r* | *p* | *k* |
| *l* | *o* | *s* | *q* | *m* |

*A* ad *B*, quaſi eadem ratio eſt, quæ *C* ad *D*: & *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *E* ad *F* compoſitam, quaſi eamdem eſſe, quæ ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita.

*Præpar.*

Aſſumatur *i* ad *k*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: item aſſumatur quælibet *l* ad *m*, minor. Deinde fiant *i* ad *n*, & *l* ad *o*, ſicut cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: item *p* ad *k*, & *q* ad *m*, ſicut cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*. Denique ſumatur inter *n*, *p*, media quælibet quantitas *r*: & inter *o*, *q*, media quælibet *s*.

P *De-*

*Demonstr.*

*constr.* Quoniam *i* ad *k*, maior eſt, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita; & eſt *i* ad *n*, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, &

4. *h.* *p* ad *k*, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *i* ad *k*, maior eſt, quàm, quæ ex *i* ad *n*, & ex *p* ad

* k, compoſita. Ergo *n*, maior eſt, quàm *p*. Si

*p. h.* enim *n*, eſſet æqualis ipſi *p*: ex *i* ad *n*, & ex æqualitate, & ex *p* ad *k*, cõpoſita ratio *i* ad *k*, eſſet eadem, quæ ex ea, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior poteſt eſſe *G*

4. *h.* ad *H*, compoſita eſt; contra aſſumptum. Quod ſi *n*, eſſent minor, quàm *p*: ex *i* ad *n*, & minori inæqualitate, & *p* ad *k*, compoſita ratio *i* ad k, eſſet minor, quàm quæ ex ea, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*, compoſita eſt; contra idem aſſumptum.

*constr.* Ergo *n*, maior eſt, quàm *p*: & *r*, minor, quàm

8. 5. *n*; & maior quàm *p*: habetque *i* ad *r*, maiorem rationem, quàm *i* ad *n*; ideſt maiorem, quàm,

8. 5. cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: habet quoque *r* ad k, maiorem, quàm *p* ad k; ideſt, maiorem, quàm, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*.

*constr.* Similiter, quoniam *l* ad *m*, minor eſt, quàm cui propior poteſt eſſe ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: & eſt *l* ad *o*, eadem, cui propior po-

4. *h.* teſt eſſe *C* ad *D*: & *q* ad *m*, eadem, cui pro-

pior

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | | *C* | *D* |
| *E* | *F* | | *G* | *H* |
| *i* | *n* | *r* | *p* | *k* |
| *l* | *o* | *s* | *q* | *m* |

4. *h.* pior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *l* ad *m*, minor eſt, quàm quæ eſt ex *l* ad *o*, & *q* ad *m* compoſita. Ergo *o*, minor eſt, quàm *q*. demonſtrari enim poteſt vt ſupra, quod ſi *o*, eſſet æqualis, vel
*p. h.* maior, quàm *q*: eſſet *l* ad *m* ratio non minor,
4. *h.* quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita; contra aſſumptum.

*conſtr.* Cum itaque *o*, ſit minor, quàm *q*: erit *s*, ma-
8. 5. ior, quàm *o*; minor, quàm *q*: habetque *l* ad *s*, minorem rationem, quàm *l* ad *o*; ideſt, minorem,
8. 5. quàm, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*. habet quoque *s* ad *m*, minorem rationem, quàm *q* ad *m*: ideſt, minorem, quàm, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*.

*ſup.* Itaque *i* ad *r*, maior eſt, quàm, cui propior
*hyp.* poteſt eſſe *C* ad *D*: & *l* ad *s*, minor. Sed *A* ad
*def.4.h.* *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *i* ad *r*, & maior, quàm
*ſup.* *l* ad *s*. Similiter *r* ad k maior eſt, quàm, cui pro-
*hypoth.* pior poteſt eſſe *G* ad *H*; & *s* ad *m*, minor: & eſt
*def.4.h.* *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*: ergo *E* ad *F* poteſt eſſe minor, quàm *r* ad k; & maior,
4. *h.* quàm *s* ad *m*. Ergo ex æquali, poteſt ex *A* ad *B*,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | | *C* | | *D* |
| *E* | *F* | | *G* | | *H* |
| *i* | *n* | *r* | *p* | | *k* |
| *l* | *o* | *s* | *q* | | *m* |

& *E* ad *F* composita, minor esse, quàm, quæ ex *i* ad *r*, & *r* ad k, componitur, *i* ad k; & maior, quàm, quæ ex *l* ad *s*, & *s* ad *m*, compo-
*constr.* nitur, *l* ad *m*. Est autem *i* ad k, sumpta quælibet maior, quàm cui propior potest esse composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*; & *l* ad *m*, minor.
*def.4.h.* Ergo composita ex *A* ad *B*, & *E* ad *F*, quasi eadem est, quæ composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 22. *Prop.* 22.

QVasi proportionales, permutando, sunt quasi proportionales. *Hypoth.*

Sint quasi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, quasi proportionales esse *A* ad *C*, vt *B* ad *D*. *Demonstr.*

*hypoth.* Sunt enim quasi eędem rationes *A* ad *B*, & *B*
21. *h.* ad *C*; quæ *B* ad *C*, & *C* ad *D*: ergo ex æquali, *A* ad *C*, & *B* ad *D*, rationes compositę sunt qua-
*def.5.h.* si eædem: Ergo *A* ad *C*, & *B* ad *D*, sunt quasi proportionales. Quod &c.

Quare &c.

*Theor. 23. Prop. 23.*

Rationes quasi eædem, componendo, sunt quasi eædem.

*Hypoth.*

*A* ad *B*, quasi eadem esto, quæ *C* ad *D*.

Dico componendo *A+B* ad *B*, quasi eandem esse, quæ *C+D* ad *D*.

*Præpar.*

Assumatur *e* ad *f*, quælibet ratio maior, quàm cui propior potest esse *C+D* ad *D*: itē *g* ad *h*, quælibet maioris inæqualitatis, sed minor.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *constr.* | Quoniam *e* ad *f*, maior est, quàm cui propior |
| *p. h.* | potest esse *C+D* ad *D*: diuidendo, *e---f* ad *f*, |
| | maior est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*. |
| *constr.* | Item quoniam *g* ad *h*, minor est, quàm cui pro- |
| *p. h.* | pior potest esse *C+D* ad *D*: diuidendo *g---h* ad |
| | *h* minor est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*. |
| *hypoth.* | Sed *A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: er- |
| *def. 4. h.* | go *A* ad *B*, potest esse minor, quàm *e---f* ad *f*; & |
| *p. h.* | maior, quàm *g---h* ad *h*. Ergo componendo |
| | *A+B* ad *B* potest esse minor, quàm *e* ad *f*; & |
| *def. 4. h.* | maior, quàm *g* ad *h*. Ergo *A+B* ad *B*, quasi |
| | eadem est, quæ *C+D* ad *D*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.*

*Theor. 24. Prop. 24.*

Rationes quasi eædem, diuidendo, sunt quasi eædem.

*Hypoth.*

Sint rationes quasi eædem *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico diuidendo, quasi easdem esse rationes *A*—*B* ad *B*, & *C*—*D* ad *D*.

*Præpar.*

Assumatur *e* ad *f*, quęlibet ratio maior, quàm cui propior potest esse *C*—*D* ad *D*: & assumatur *g* ad *h*, quælibet minor.

*Demonstr.*

*constr.* Quoniam *e* ad *f*, maior est, quàm, cui propior
*p. h.* potest esse *C*—*D* ad *D*; & *g* ad *h*, minor: ergo componendo *e*+*f* ad *f*, maior est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*; & *g*+*h* ad *h*, minor.
*hyp.* Sed *A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: er-
*def. 4. h.* go *A* ad *B* potest minor esse, quàm *e*+*f* ad *f*; &
*p. h.* maior, quàm *g*+*h* ad *h*. Ergo diuidendo *A*—*B* ad *B*, potest minor esse, quàm *e* ad *f*; & maior,
*def. 4. h.* quàm *g* ad *h*. Ergo *A*—*B* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C*—*D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 25. Prop. 25.*

Rationes quasi eędem, per conuersionem rationis, sunt quasi eędem.

*Hypoth.*

*Hypoth.*

Sint rationes quasi eædem, $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$.

Dico per conuersionem rationis, quasi easdem esse rationes $A$ ad $A - B$, & $C$ ad $C - D$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hyp.* | $A; B:$ quasi $C: D$. |
| 24. *h.* | $A - B; B:$ quasi $C - D; D$. |
| 20. *h.* | $B; A - B:$ quasi $D; C - D$. |
| 21. *h.* | $A; A - B:$ quasi $C; C - D$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 26. Propos. 26.*

SI quotcunque quantitates fuerint quasi proportionales, colligendo, quasi proportionales erunt, omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

*Hypoth.*

$A; B:$ quasi $C; D:$

Dico $A + C; B + D:$ quasi $C; D$.

*Demonst.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $A; B:$ quasi $C; D$. |
| 22. *h.* | $A; C:$ quasi $B; D$. |
| 23. *h.* | $A + C; C:$ quasi $B + D; D$. |
| 22. *h.* | $A + C; B + D:$ quasi $C: D$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 27. Pro. 27.*

SI prima ad secundam quasi proportionalis fuerit, sicut tertia ad quartam; & quinta ad secundam, quasi sicut

sexta

ſexta ad quartam: erit prima cum quinta ad ſecundam, quaſi ſicut tertia cum ſexta ad quartam.

*Hypoth.*

*A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
*E*; *B*: quaſi *F* ad *D*.
Dico *A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*.

*Præpar.*

| | |
|---|---|
| hypoth. | *A*; *B*: quaſi *C*; *D*. |
| 22. h. | *A*; *C*: quaſi *B*; *D*. |
| hypoth. | *E*; *B*: quaſi *F*; *D*. |
| 22. h. | *E*; *F*: quaſi *B*; *D*. |
| 19. h. | *A*; *C*: quaſi *E*; *F*. |
| 22. h. | *A*; *E*: quaſi *C*; *F*. |
| 23. h. | *A* + *E*; *E*: quaſi *C* + *F*; *F*. |
| hypoth. | *E*; *B*: quaſi *F*; *D*. |
| 21. h. | *A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*. Quod &c. |

Quare &c.

---

Theor. 28. *Prop.* 28.

QVaſi partes, cum quaſi æquemultiplicibus, in quaſi eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

*Hypoth.*

*A*; *B*: quaſi tripla.
*C*; *D*: quaſi tripla.
Dico *A*; *C*: quaſi *B*; *D*.

De-

*Demonstr.*

18. *h.* | *A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.* | *A*; *C*: quasi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 29. *Prop.* 29.

SI totam ad totam quasi proportionalis fuerit, vt ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam, quasi proportionalis erit, vt tota ad totam.

*Hypoth.*

*A*; *B*: quasi *C*: *D*.

Dico *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | *A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.* | *A*; *C*: quasi *B*; *D*.
25. *h.* | *A*; *A*—*C*: quasi *B*; *B*—*D*.
22. *h.* | *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 30. *Prop.* 30.

QVantitates quasi proportionales, & per homologiam, sunt quasi proportionales.

*Demonstr.*

Nam conuertendo, quasi proportionales fiunt, 20. *h*: & colligendo, 26, & 27. *h*: & æquemultiplicando, & æquepartiendo, 28. *h*: & permutando, 22. *h*: & diuidendo, 24. *h*: & componendo, 23. *h*: & homologas ab homologis

mologis auferendo, 29.*h*: & per conuersionem rationis, 25.*h*: &ex æquali, 21.*h*: & coniunctis omnifariam argumentis huiusmodi, quocunque ordine, per homologiam, quasi proportionales fiunt.

---

*Theor.* 31. *Prop.* 31.

QVasi æquales, ad quasi æquales, rationes habent, vel quasi infinitas vtrasque, vel quasi nullas, vel quasi easdem inter se.

*Hypoth. comm.*

*A*, *B* sunt quasi æquales.
*C*, *D* sunt quasi æquales.

*Hypoth. p. casus.*

*A*; *C*: est quasi infinita.
Dico *B*; *D*: esse quasi infinitam.

*Præpar.*

Assumatur *e* ad *f*, quælibet ratio: vnde fit componendo *e*+*f* ad *f*: deinde per conuersionem rationis *e*+*f* ad *e*: & conuertendo *e* ad *e*+*f*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *def.3.h.* | *B*; *A*: potest maior esse, quàm *e*; *e*+*f*. |
| *def.p.h.* | *A*; *C*: potest maior esse, quàm *e*+*f*; *f*. |
| 4. *h.* | *B*; *C*: potest maior esse, quàm *e*; *f*. |
| *def.p.h.* | *B*; *C*: ratio est quasi infinita. |
| *def.p.h.* | *B*; *C*: potest maior esse, quàm *e*+*f*; *f*. |
| *def.3.h.* | *C*; *D*: potest maior esse, quàm *e*; *e*+*f*. |
| 4. *h.* | *B*; *D*: potest maior esse, quàm *e*; *f*. |

*B*; *D*:

def. p. b. | B; D: ratio est quasi infinita: Quod &c.

*Hypoth. 2. casus.*

A; C: est quasi nulla.

Dico B; D: esse quasi nullam.

*Demonstr.*

10. b. | C; A: quasi infinita.
sup. | D; B: quasi infinita.
7. b. | B; D: quasi nulla. Quod &c.

*Hypoth. 3. casus.*

A; C: neq; quasi infinita, neq: quasi nulla est.

Dico B; D: quasi esse A; C.

*Demonstr.*

B ad D, neque est quasi infinita, neque quasi nulla:
sup. | alioquin A ad C esset quasi infinita, vel quasi nulla, contra hypothesim.
19. b. | A; B: quasi C; D.
22. b. | A; C: quasi B; D. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theorema 32. Prop. 32.*

SI prima ad secundam, rationem habuerit quasi infinitam; item ad tertiam, rationem quasi infinitam: habebit & ad vtriusque summam, & ad vtriusque differentiam, rationem quasi infinitam.

*Hypoth.*

A; B: quasi infinita.

A; C: quasi infinita.

Dico $A; B + C$: quaſi infinitam eſſe.
Et $A; B - C$: quaſi infinitam eſſe.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $A; B$: quaſi infinita. |
| 8. *h.* | $A + B; B$: quaſi infinita. |
| 9. *h.* | $A + B; A$: quaſi æqualis. |
| *hypoth.* | $A; C$: quaſi infinita. |
| 31. *h.* | $A + B; C$: quaſi infinita. |
| 8. *h.* | $A + B + C; C$: quaſi infinita. |
| 9. *h.* | $A + B + C; A + B$: quaſi æqualis. |
| *ſup.* | $A + B; A$: quaſi æqualis. |
| 18. *h.* | $A + B + C; A$: quaſi æqualis. |
| 16. *h.* | $B + C; A$: quaſi nulla. |
| 10. *h.* | $A; B + C$: quaſi infinita. Quod &c. |
| *ſup.* | $A + B; C$: quaſi infinita. |
| 8. *h.* | $A + B - C; C$: quaſi infinita. |
| 7. *h.* | $C; A + B - C$: quaſi nulla. |
| 11. *h.* | $A + B; A + B - C$: quaſi æqualis. |
| *ſup.* | $A; A + B$: quaſi æqualis. |
| 18. *h.* | $A + B - C; A$: quaſi ęqualis. |
| 17. *h.* | $A + B - C; B - C$: quaſi infinita. |
| 8. *h.* | $A; B - C$: quaſi infinita. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 33. *Propoſ.* 33.

SI fuerint tres termini, primus indeterminatus, reliqui duo determinati; fuerit autem primus ad ſecundum quaſi

quasi æqualis: habebit secundus ad tertium eandem rationem, quàm quasi habet primus.

*Hypoth.*

Tres termini sunt, primus indeterminatus *A*; reliqui duo determinati, *b*, & *c*: & est *A* ad *b*, quasi æqualis.

Dico *b* ad *c* eandem esse rationem, quàm quasi habet *A* ad *c*.

*Præpar.*

Assumatur *d*, æqualis ipsi *c*.

*Demonst.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *A*; *b*: quasi æqualis. |
| *constr.* | *c*; *d*: æqualis. |
| *def.4.h.* | *A*; *b*: quasi *c*; *d*. |
| 22. *h.* | *A*; *c*: quasi *b*; *d*. |
| 8. 5. | *b*; *d*: *b*; *c*. |
| 19. *h.* | *A*; *c*: quasi *b*; *c*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 34. Prop. 34.*

TOta ad vnitatem, quasi est infinita.

*Demonstr.*

Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota sit; est indeterminata: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est indeterminata. Cumque possit dici, cuius numeri tota sit; est determinabilis: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est determinabilis. Cum denique possit dici eius numeri tota, qui maior sit, quàm vt ad vnitatem, habeat quamlibet ratio-

nem

nem datam; qui numerus, ipsa sui ipsius est tota: erit ratio totæ ad vnitatem, maior, quàm data
def. p. h. quælibet. Ergo tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 35. Prop. 35.

SEsquitota ad vnitatem, quasi est infinita. Item semitota.

*Demonstr.*

34. h. Tota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo com-
8. h. ponendo, sesquitota ad vnitatem, quasi est infi-
8. h. nita. Item diuidendo, semitota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 36. Prop. 36.

TOta, sesquitota, & semitota, quasi sunt æquales inter se. *Demonstr.*

35. h. Sesquitota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo
9. h. per conuersionem rationis, sesquitota ad totam,
34. h. quasi est æqualis. Rursum tota ad vnitatem quasi
9. h. sit infinita: ergo per conuersionem rationis, tota
18. h. ad semitotam, quasi est æqualis. Ergo sesquitota ad semitotam, quasi est æqualis.

Theor. 37. Prop. 37.

TOta quantumlibet ordinata ad vnitatem, quasi est infinita. Item sesquitota, & semitota.

Dico

Dico $t3$ ; $u$: quasi infinitum.

*Demonstr.*

34. *b.* | $t$ ; $u$: quasi infinita.
def.6.p. | $t3$ ; $u$: triplicata $t$ ; $u$.
12. *b.* | $t3$ ; $u$: quasi infinita. Quod &c.
ex35.*b.* | Similiter ostendetur $q3$ ; $u$: quasi infinita.
| Item $m3$ ; $u$: quasi infinita.

Quare &c.

---

*Theor.* 38. *Prop.* 38.

Totarum inæqualiter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quasi est infinita. Item sesquitotarum, & semitotarum.

*Hypoth.*

$t5$ magis est ordinata, quàm $t3$.

Dico $t5$ ; $t3$ : quasi infinitam.

*Demonstr.*

34. *b.* | $t$ ; $u$: quasi infinita.
def.6.p. | $t5$ ; $t4$ : $t$ ; $u$.
def.6.p. | $t4$ ; $t3$ : $t$ ; $u$.
13. 5. | $t5$ ; $t4$: quasi infinita.
13. 5. | $t4$ ; $t3$ : quasi infinita.
12. *b.* | $t5$ ; $t3$ : quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur $q5$ ; $q3$ : quasi infinita.

Et $m5$ ; $m3$ : quasi infinita.

Quare &c.

---

*Theor.* 39. *Prop.* 39.

Æquordinatæ, tota, semitota, & sesquitota, sunt quasi æquales.

Dico $t3$, $q3$, $m3$, quasi æquales esse.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 36. *h.* | $t$; $q$: quasi æqualis. |
| 3. *p.* | $t3$; $q3$: triplicata $t$; $q$. |
| 21. *h.* | $t3$; $q3$: quasi æqualis. Quod &c. |
| *sup.* | $q3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c. |
| 18. *h.* | $t3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 40. *Prop.* 40.

Tota magis ordinata, ad aggregatum ex totis minùs ordinatis, quasi est infinita. Item semitota, ad aggregatum ex semitotis: & sesquitota, ad aggregatum ex sesquitotis.

*Hypoth.*

Esto tota magis ordinata $t3$: qua minùs ordinatæ. $t2$, $t$, & rationalis $u$: quarum aggregatum: $5t2 + 3t + 4u$.

Dico $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quasi esse infinitam.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 38. *h.* | $t3$; $t2$: quasi infinita. |
| 32. *h.* | $t3$; $5t2$: quasi infinita. |
| 38. *h.* | $t3$; $t$: quasi infinita. |
| 32. *h.* | $t3$; $3t$: quasi infinita. |

$t3$;

37. b. | $t3$; $u$: quasi infinita.
32. b. | $t3$; $4u$: quasi infinita.
32. b. | $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur, $m3$; $5m2 + 3m + 4u$: quasi infinita. Quod &c.

Item, $q3$; $5q2 + 3q + 4u$: quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 41. *Prop.* 41.

TOta magis ordinata, sibi ipsi, & alijs minùs ordinatis, additis, vel subtractis, quasi est æqualis. Item semitota: & sesquitota.

*Hypoth.*

Tota vel semitota, vel sesquitota magis ordinata esto $A$: quacum additæ minùs ordinatæ, sunto $B$: & subtractæ $C$.

Dico $A$, $A + B$, $A - C$, $A + B - C$, quasi æquales esse.

*Demonstr.*

40. b. | $A$; $B$: quasi infinita.
8. b. | $A + B$; $B$: quasi infinita.
9. b. | $A + B$; $A$: quasi æqualis. Quod &c.
40. b. | $A$; $C$: quasi infinita.
9. b. | $A$; $A - C$: quasi æqualis. Quod &c.
32. b. | $A$; $B - C$: quasi infinita.
8. b. | $A + B - C$; $B - C$: quasi infinita.
9. b. | $A + B - C$; $A$: quasi æqualis. Quod &c.

18. b. | $A+B-C$, $A+B$, $A-C$, quaſi ſunt æquales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 42. Prop. 42.*

QVælibet quadratrix quaſi eſt æqualis ad totam vnitate plus ordinatam, quàm ſit eius baſis. item ad ſemitotam: & ad ſeſquitotam.

*Hypoth.*

Eſto quadratrix *A*: & eſto tota *B*, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*.

Dico *A* ad *B*, quaſi æqualem eſſe.

*Demonſtr.*

22. 2. | *A*, eſt æqualis ipſi *B*, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm
hypoth. | baſis *A*. Sed *B*, eſt tota vnitate plus ordinata, quàm baſis *A*; ideòque totæ, non plus ordinatę, quàm baſis *A*, ſunt minùs ordinatæ, quàm *B*. Ergo *A*; eſt æqualis ipſi *B*, denptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm
41. b. | *B*. Sed & *B*, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm *B*, quaſi eſt
18. b. | æqualis ipſi *B*. Ergo *A*, quaſi eſt æqualis ipſi *B*. Quod &c.

31. 2. | Idem, & eodem modo demonſtraretur, ſi *B*
32. 2. | eſſet ſemitota: necnō ſi *B* eſſet ſeſquitota. Quę &c.

Quare &c.

---

*Theor. 43. Prop. 43.*

QVælibet quadratrix, ad totas non plus ordinatas, quàm ſit eius baſis, quomodolibet acceptas, quaſi eſt infinita. item ad ſemitotas: necnon ad ſeſquitotas.

*Hypoth.*

Eſto quadratrix *A*: & in *B* ſint ſumptæ totæ quomodolibet, vel ſemitotæ, vel ſeſquitotæ.

Dico *A* ad *B* quaſi infinitam eſſe.

*Præpar.*

Sumatur *C*, tota, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*: vel ſemitota, vel ſeſquitota.

*Demonſtr.*

41. *b.* | *C*; *B*: quaſi infinita.
42. *b.* | *A*; *C*: quaſi æqualis.
31. *b.* | *A*; *D*: quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 44. Prop. 44.*

RAtionis quaſi infinitæ diuiſo antecedente per datum numerum, ratio eſt quaſi infinita.

*Hypoth.*

*A* ad *B*, quaſi eſt infinita.

Dico ſubtriplam *A* ad *B*, quaſi infinitam eſſe.

*Præpar.*

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $A$; $B$: quaſi infinita. |
| *def.p.h.* | $A$; $B$: poteſt maior eſſe, quàm $3c$; $d$. |
| *p. h.* | $A$; $3c$: poteſt maior eſſe, quàm $B$; $d$. |
| 15. 5. | $A$; $3c$: ſubtripla $A$; $c$. |
| 13. 5. | Subtripla $A$; $c$: poteſt maior eſſe, quàm $B$; $d$. |
| *p. h.* | Subtripla $A$; $B$: poteſt maior eſſe, quàm $c$; $d$. |
| *def.p.h.* | Subtripla $A$; $B$: quaſi eſt infinita. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 45. Prop. 45.*

Rationis quaſi infinitæ multiplicato conſequente, ratio eſt quaſi infinita.

*Hypoth.*

$A$ ad $B$, quaſi eſt infinita.

Dico $A$ ad duplam $B$, quaſi eſſe infinitam.

*Præpar.*

Aſſumatur quælibet ratio $c$ ad $d$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $A$; $B$: quaſi infinita. |
| *def.p.h.* | $A$; $B$: poteſt maior eſſe, quàm $2c$; $d$. |
| *p. h.* | $A$; $2c$: poteſt maior eſſe, quàm $B$; $d$. |
| 15. 5. | $B$; $d$: $2B$; $2d$. |
| 13. 5. | $A$; $2c$: poteſt maior eſſe, quàm $2B$; $2d$. |
| *p. h.* | $A$; $2B$: poteſt maior eſſe, quàm $2c$; $2d$: |
| 15. 5. | $2c$; $2d$: $c$; $d$. |
| 13. 5. | $A$; $2B$: poteſt maior eſſe, quàm $c$; $d$. |

*def.p.b.* | *A*; 2*B*: quaſi eſt infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theorema* 46. *Prop.* 46.

RAtio compoſita ex duabus rationibus; altera, quaſi quadam propoſita, altera, quaſi infinita; quaſi eſt infinita.

*Hypoth.*

*A*; *B*: quaſi quædam propoſita.

*B*; *C*: quaſi infinita.

Dico *A*; *C*: quaſi eſſe infinitam.

*Præpar.*

Aſſumatur quælibet ratio, *d* ad *e*: item aſſumatur quælibet *d* ad *f*, minor, quàm, cui quaſi eadem eſſe dicitur *A* ad *B*.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *B*; *C*: quaſi eſt infinita. |
| *def.p.b.* | *B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *f*; *e*. |
| *def.3.b.* | *A*; *B*: poteſt maior eſſe, quàm *d*; *f*. |
| *4. b.* | *A*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *d*; *e*. |
| *def.p.b.* | *A*; *C*: quaſi eſt infinita. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 47. *Prop.* 47.

QVadratrices in eadem baſi iacentes, inter ſe ſunt quaſi æquales.

*Hy-*

*Hypoth.*

Sint in eadem basi quadratrices ↫A, B.
Dico ↫A, B, quasi æquales esse.

*Præpar.*

Sumatur C, tota, vnitate plus ordinata, quàm sit basis ipsarum ↫A, B.

*Demonstr.*

43. h. | ↫A; C: quasi æqualis.
43. h. | B; C: quasi æqualis.
18. h. | ↫A; C: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 48. Propos. 48.*

SVb quadratrices in eadem basi iacentes, sunt quasi æquales.

*Hypoth.*

Sint in eadem basi subquadratrices ↫A, B.
Dico ↫A, B, quasi æquales esse.

*Præpar.*

Sumantur homonymæ quadratrices C, D.

*Demonstr.*

def. 13. 2. | C ad ↫A, æquemultiplex est, vt D ad B.
15. 5. | C; ↫A: D; B.
16. 5. | C; D: ↫A; B.
47. h. | C; D: quasi ęqualis.
19. h. | A; B: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 49. *Prop.* 49.

IN diuersis basibus, quadratrix in magis ordinata, ad quadratricem in minùs ordinata, quasi est infinita.

*Hypoth.*

Sint quadratrices *A*, *B*, in diuersis basibus: *A*, in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

*Præpar.*

Assumatur tota *C*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *A*: & tota *D*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *B*.

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam *A* est in basi magis ordinata, quàm
38. *h.* *B*: ergo etiam *C* est magis ordinata tota, quàm
42. *h.* *D*: ergo *C* ad *D*, quasi est infinita. Sed *C*, *A*,
31. *h.* sunt quasi æquales: & *D*, *B*, quasi æquales. Ergo *A* ad *B*, quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 50. *Prop.* 50.

IN diuersis basibus, quælibet massa in magis ordinata, ad quamlibet massam, in minùs ordinata, quasi est infinita.

*Hypoth.*

Sint massæ *A*, *B*, in diuersis basibus: *A* in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

*Præ-*

*Præpar.*

Aſſumantur quadratrices *C*, *D*: *C* quidem homonyma ipſi *A*; & *D*, ipſi *B*.

*Demonſtr.*

hypoth. Quoniam *A*, eſt in baſi magis ordinata, quàm *B*: etiam *C*, eſt in baſi magis ordinata, quàm
49. h. *D*: & *C* ad *D*, quaſi eſt infinita. Eſt autem ratio *A* ad *C*, quædam propoſita, quàm habent propoſiti numeri multiplicantes homonymam
46. h. ſpeciem: ergo ex æquali, *A* ad *D*, ratio eſt quaſi infinita. Item *D* ad *B*, ratio eſt quædam propoſita, quàm habent propoſiti numeri multipli-
46. h. cantes hononymam ſpeciem: ergo ex æquali, *A* ad *B*, ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 51. *Prop.* 51.

SPecies in eadem baſi iacentes, ſunt reciprocè quaſi proportionales, vt numeri, in tabula multiplicium, ſimiliter iacentes.

*Hypoht.*

Sint in eadem baſi ſpecies *A*, *B*: & ſint numeri ſimiliter iacentes, in tabula multiplicium; *c*. ſimiliter, atque *A*; & *d*, ſimiliter, atque *B*.

Dico *A*; *B*: quaſi *d*; *c*.

*Præpar.*

Sumantur ſubquadratrices *E*, *F*: *E* quidem homonyma ipſi *A*; & *F*, ipſi *B*.

De-

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| deff. 11. p. & 2. | *A*; *E*: *u*; *c*. |
| 48. *b*. | *E*; *F*: quasi æqualis. |
| deff. 11. p. & 2. | *F*; *B*: *d*; *u*. |
| 21. *b*. | *A*; *B*: quasi *d*; *c*. Quod &c. Quare &c. |

---

*Theor.* 52. *Prop.* 52.

MAssæ in eadem basi iacentes, quasi eamdem habent rationem compositam, ex directa suorum numerorum, & reciproca numerorum in tabula multiplicium similiter iacentium.

*Hypoth.*

Sint in eadem basi, massæ *A*, *B*: quarum numeri *c*, *d*: *c* quidem, qui multiplicans homonymam speciem *A*, facit massam *A*; & *d*, qui multiplicans homonymam speciem *B*, facit massam *B*. Et sint numeri *e*, *f*, similiter iacentes in tabula multiplicium; *e* quidem, sicut *A*; & *f*, sicut *B*.

Dico *A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*.

*Præpar.*

Sumantur species homonymæ *G*, *H*: *G* quidem ipsi *A*; & *H*, ipsi *B*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| hypoth. | *A*; *G*: *c*; *u*. |
| 51. *b*. | *G*; *H*: quasi *f*; *e*. |
| hypoth. | *H*; *B*: *u*; *d*. |
| 21. *b*. | *A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*. Quod &c. Quare &c. |

---

*Proplema primum Prop. 53.*

DAta ratione; datoque numero pariter pari: subtotuplicatam rationem inuenire, quotus est datus numerus.

*Hypoth.*

Sit data ratio *a* ad *b*: datusque numerus *c*, pariter par.

Oportet rationem inuenire, subtotuplicatam rationis, *a* ad *b*, quotus est *c*.

*Constr.*

Subdiuidatur numerus *c*, vsque ad vnitatem: & sit *c* ad *d*, duplus: & *d* ad *f*, duplus: & *f* ad vnitatem, duplus. Deinde sumatur, inter *a*, *b*, media proportionalis *g*: & inter *a*, *g*, media proportionalis *h*: & inter *a*, *h*, media proportionalis *i*: vt fiant sumptiones totidem, quot sunt, numeri *c* diuisiones bifariam, vsque ad vnitatem.

Dico *a*; *i*: subtotuplicatam *a*; *b*, quotus est *c*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *constr.* | *a*; *b*: duplicata *a*; *g*, sicut *c*; *d*: duplus. |
| *constr.* | *a*; *g*: duplicata *a*; *h*, sicut *d*; *f*: duplus. |
| *constr.* | *a*; *h*: duplicata *a*; *i*, sicut *f*; *u*: duplus. |
| *p. p.* | *a*; *b*: multiplicata *a*: *i*, sicut *c*; *u*: multiplus. |
| | *a*; *i*: subtotuplicata *a*; *b*, quotus est *c*. Quod erat faciendum. |

Quare data ratione, datoque numero pariter pari, subtotuplicatam rationem inuenimus, quotus est datus numerus.

*Probl. 2. Prop. 54.*

DAta ratione inæqualitatis; & proposito numero ordinis potestatum: numerum inuenire, pro quo fesquitota, & semitota æqueordinatæ, sunt ad inuicem propiores æqualitati.

*Hypoth.*

Sit data ratio inæqualitatis *a*, ad *b*: & sit *a*, maior, quàm *b*: sitque datus numerus quinarius.

Oportet numerum inuenire, quo quo sesquitota quinta, ad semitotam quintam, minor est, quàm vt *a* ad *b*: & semitota quinta, ad sesquitotam quintam, maior, quàm vt *b* ad *a*.

*Constr.*

Sumatur numerus pariter par, nõ minor, quàm
53. *b.* datus quinarius: & sit sumptus octonarius: & suboctuplicata ratio inueniatur, rationis *a* ad *b*; quę sit *a* ad *c*: & sumatur numerus *d*, maior ad binarium, quàm vt *a* ad *a*---*c*: qui, dempto binario, relinquatur *e*: & inter *d*, *e*, sumatur nume-
*deff.* 18. *&* 19. 2 rus *f*: pro quo, vt radice tota; semitota est *e*; sesquitota *d*.

Dico *d*5; *e*5: minorem esse, quàm *a*; *b*.

Et *e*5; *d*5: maiorem, quàm *b*; *a*.

*Demonstr.*

*constr.* *d*; 2: maior, quàm *a*; *a*---*c*.

3. *b.* *d*; *e*: minor, quàm *a*; *c*.

4. *b.* *d*5; *e*5: minor, quàm *a*5; *c*5.

5. h. | $a5;\ c5$: minor, quàm $a8;\ c8$.
constr. | $a8;\ c8$: $a;\ b$.
13. 5. | $d5;\ e5$: minor, quàm $a;\ b$. Quod &c.
2. h. | $e5;\ d5$: maior, quàm $b;\ a$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 3. Prop. 55.*

DAta ratione; & propositis ordinibus potestatum inæqualibus; numerum inuenire, pro quo, plus ordinata potestas, ad minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio, $a$ ad $b$: sint propositi ordines potestatum inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, potestas quinta ad secundam, maior est, quàm vt $a$ ad $b$.

*Constr.*

Sumatur numerus $c$, in serie tertiarum potestatum ab omnibus numeris, maior ad vnitatem, quàm vt $a$ ad $b$: numeri autem $c$, sit radix $d$.

Dico, pro $d$ radice, $d5;\ d2$: maiorem esse, quàm $a;\ b$.

*Demonstr.*

constr. | $c$: $d3$.
8. 5. & def. 6. p. | $c;\ u$: $d3;\ u$: $d5;\ d2$.
constr. | $c;\ u$: maior, quàm $a;\ b$.
13. 5. | $d5;\ d2$: maior, quàm $a;\ b$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 4. Prop. 56.*

DAta ratione; propositisque ordinibus potestatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, semitota plus ordinata, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio $a$ ad $b$: sintque propositi ordines potestatum, quinarius, atque ternarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, semitota quinta ad sesquitotam tertiam, maior est, quàm vt $a$ ad $b$.

*Constr.*

Inueniatur *per* 55.*h.* numerus $c$, pro quo, semitota $d$: & semitota quinta $d5$, ad semitotam tertiam $d3$, maior est, quàm vt $a+b$ ad $b$. Inueniatur deinde *per* 54.*h.* numerus $e$, non minor, quàm $c$; pro quo, semitota $m$, & sesquitota $q$; & $m3$ ad $q3$, maior est, quàm vt $a$ ad $a+b$.

Dico, pro numero $e$ radice, $m5$; $q3$: maiorem esse, quàm $a$; $b$. *Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *constr.* | $e$: non minor, quàm $c$. |
| *def.* 18.2 | $m$: non minor, quàm $d$. |
| 5. *h.* | $m5$; $d5$: non minor, quàm $m3$; $d3$. |
| *p. h.* | $m5$; $m3$: non minor, quàm $d5$; $d3$. |
| *constr.* | $d5$; $d3$: maior, quàm $a+b$; $b$. |
| 13. 5. | $m5$; $m3$: maior, quàm $a+b$; $b$. |
| *constr.* | $m3$; $q3$: maior, quàm $a$, $a+b$. |
| 4. *h.* | $m5$; $q3$: maior, quàm $a$; $b$. Quod &c. |

Quare &c.

*Probl. 5. Prop. 57.*

DAtis duabus rationibus; & propositis duobus inæqualibus ordinibus potestatum: numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex vna data ratione, & ex ratione semitotæ plus ordinatæ, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm altera data ratio.

*Hypoth.*

Sint datæ rationes, *a* ad *b*, & *c* ad *d*: & sint propositi ordines inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex *a* ad *b*, & ex semitotæ quintæ ad sesquitotam secundam, maior est, quàm *c* ad *d*.

*Constr.*

56. *h.* | Fiat vt *b* ad *a*, ita *d* ad *e*: & inueniatur *f* numerus, pro quo, semitota *g*, sesquitota *h*; & *g5* ad *h3*, maior, quàm *c* ad *e*.

Dico, pro *f* radice, *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maiorem esse, quàm *c*; *d*.

*Demonstr.*

*constr.* | *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *e*.
*constr.* | *a*; *b*: *e*; *d*.
4. *h.* | *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 6. Prop. 58.*

DAta ratione inæqualitatis; & propositis duabus in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum in-

inuenire, pro quo quadratrices propositæ, sunt propiores æqualitati, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & sit *a* maior, quàm *b*: sintque propositæ in quinta basi, duæ quadratrices *c*, *d*.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c*, & *d*, sunt ad inuicem, minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

*Constr.*

54. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*; & *f6* ad *g6*, maior est, quàm vt *b* ad *a*; & *g6* ad *f6*, minor, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, quadratrices *c*, *d*, esse ad inuicem minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

*Demonstr.*

30. 2. | *c*, est maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.
30. 2. | *d*, est maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.
8. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *f6*. *g6*. minor, quàm *g6*; *f6*.
2. *b.* | *d*; *c*: minor, quàm *g6*. *f6*. maior, quàm *f6*; *g6*.
*constr.* | *f6*; *g6*: maior, quàm *b*; *a*.
*constr.* | *g6*; *f6*: minor, quàm *a*; *b*.
13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *b*; *a*. minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.
13. 5. | *d*; *c*: minor, quàm *a*; *b*. maior, quàm *b*; *a*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl.* 7. *Prop.* 59.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum inuenire, pro quo, quadratrix, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio *a* ad *b*: & propositæ sint quadratrices duæ *c*, *d*; *c*, in quinta basi; *d*, in secunda.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

*Constr.*

56. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*: & *f*6 ad *g*3, maior sit, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, *c*; *d*: maiorem esse, quàm *a*; *b*.

*Demonstr.*

30. 2. | *c*, maior est, quàm *f*6.

30. 2. | *d*, minor est, quàm *g*3.

8. 5. | *c*; *d*: maior est, quàm *f*6; *g*3. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl.* 8. *Prop.* 60.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus massis: numerum inuenire, pro quo, massa, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

*Hy-*

*Hypoth.*

Sit data ratio *a* ad *b*: sintque duæ massæ *c*, *d*; *c* quidem, in quinta basi; *d*, in tertia.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

*Constr.*

Fiat, vt massa *c* ad sibi synonymam quadratricem *e*, sic *a* ad *f*: & vt synonyma ipsi *d* quadratrix *g*, ad ipsam *d*, sic fiat *h* ad *b*: & inueniatur numerus *i*, pro quo, quadratrix *e*, ad quadratricem *g*, maior est, quàm vt *f* ad *h*. — *59. b.*

Dico pro *i* radice, massam *c* ad massam *d*, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*.

*Demonstr.*

*constr.* | *c*; *e*: *a*; *f*.
*constr.* | *e*; *g*: maior, quàm *f*; *h*.
*constr.* | *g*; *d*: *h*; *b*.
*4. b.* | *c*; *d*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 9. Prop. 61.*

PRopositis in eadem basi iacentibus duabus massis; & datis duabus rationibus, non ijsdem, quàm quasi habent ad inuicem massæ, sed maiore vna, minore altera: numerum inuenire, pro quo, massæ propositæ rationem habent minorem, quàm data maior, & maiorem, quàm data minor.

*Hypoth.*

Sint massę *a*, *d*: & sit ratio *i* ad *s*, quàm quasi habet *a* ad *d*: & sit *e* ad *h*, maior, quàm *i* ad *s*; & *n* ad *r*, minor.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *a* ad *d*, est minor, quàm *e* ad *h*; & maior, quàm *n* ad *r*.

*Constr.*

Sumatur ipsi *a*, synonyma quadratrix *b*; & ipsi *d* synonyma *c*. Fiat deinde.

*a*; *b*: *e*; *f*: *i*; *k*: *n*; *o*.
*c*; *d*: *g*; *h*: *l*; *s*: *p*; *r*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | *a*; *d*: quasi *i*; *s*.
*def.17.5* | *a*; *b*, +*b*; *c*, +*c*; *d*: quasi *i*; *k*, +*k*; *l*+*l*; *s*.
*constr.* | *a*; *b*: *i*; *k*.
*constr.* | *c*; *d*: *l*; *s*.
| *b*; *c*: quasi *k*; *l*.
27. *h.* | *b*; *c*: quasi æqualitas.
| *k*; *l*: æqualitas.
*hypoth.* | *e*; *h*: maior, quàm *i*; *s*.
*def.17.5* | *e*; *f*, +*f*; *g*, +*g*; *h*: maior, quàm *i*; *k*, +*k*; *l*, +*l*; *s*.
*constr.* | *e*; *f*: *i*; k.
*constr.* | *g*; *h*: *l*; *s*.
| *f*; *g*: maior, quàm k; *l*.
| *f*: maior, quàm *g*.
*hypoth.* | *n*; *r*: minor, quàm *i*; *s*.
*def.17.5* | *n*; *o*, +*o*; *p*, +*p*; *r*: minor, quàm *i*; k, +k; *l*, +*l*; *s*.
*constr.* | *n*; *o*: *i*; k.

*p*; *r*:

*constr.* | $p$; $r$: $l$; $s$.
| $o$; $p$: minor, quàm $k$; $l$.
| $o$: minor, quàm $p$.

*Constr.*

Assumatur alterutra $f$ ad $g$, vel $p$ ad $o$, minor: & sit assumpta $f$ ad $g$. Et inueniatur numerus $t$, pro quo, quadratrix $b$ ad quadratricem $c$, sit minor, quàm $f$ ad $g$; maior, quàm $g$ ad $f$. (58. *b.*)

Dico, pro $t$, massam $a$, ad massam $d$, minorem esse, quàm $e$ ad $h$; & maiorem, quàm $n$ ad $r$.

*Demonstr.*

*constr.* | $a$; $b$: $e$; $f$.
*constr.* | $b$; $c$: minor, quàm $f$; $g$.
*constr.* | $c$; $d$: $g$; $h$.
4. *b.* | $a$; $d$: minor, quàm $e$; $h$. Quod &c.
*assumpt.* | $f$; $g$: minor, quàm $p$; $o$.
2. *b.* | $g$; $f$: maior, quàm $o$; $p$.
*constr.* | $b$; $c$: maior, quàm $g$; $f$.
13. 5. | $b$; $c$: maior, quàm $o$; $p$.
*constr.* | $a$; $b$: $n$; $o$.
*constr.* | $c$; $d$: $p$; $r$.
4. *b.* | $a$; $d$: maior, quàm $n$; $r$. Quod &c.

Quare &c.

---

Petrus Mengolus, D. Iacobo Tesino Philosophiæ Doctori S. D.



*Ibi primùm ex mea schola, Vir Excellentiss. atque alteri è schola Excellentissimi Cassini, amico nostro Io. Galeatio Manzio, contigit hoc elementum communicari: quod non, sine tuo, atque illius nomine, publicari oportebat; quoniam ipsi mihi tùm placere cœpit, cum vtramque vestrûm obtinuit approbationem. Postulabam honesti furis laudem. quòd, cum huiusmodi contemplationis aliena sit materia, eorum videlicet, quibus logarithmos debemus; cumque aliena sit etiam forma, & contemplationis modus, ipsissimus Euclidis in quinto: meum fecerim ex vtraque compositum. & quemadmodum, præcedentium elementorum in vtraque subiecti, & modi nouitate gloriabar: ita præsentis in vetustate, nouam laudem quærebam. Ille, visis definitionibus, & audita primarum octo propositionum, ex Euclide, traductione fideli; statim om-*

*nibus*

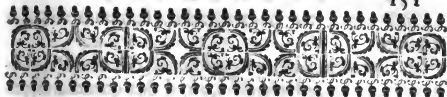
*nibus titulis propositionum, à me cursim lectis, & sine demonstratione facilem, pro sui acumine ingenij, præstabat assensum: & suggessit, potuisse totam hanc lucubrationem, vnica propositione comprehendi.* Quæ demonstrat Euclides in quinto elementorum, de magnitudinibus maioribus, minoribus, æqualibus, æquemultiplicibus, & eamdem, vel maiorem rationem habentibus: posse demonstrari de rationibus altioribus, depressioribus, ęquealtis, ęquemultiplicatis, & eamdem, vel maiorem logarithmicam rationem habentibus. *Cogitabam si possem huiusmodi vti consilio: tibique interim rure superuenienti cæpi communicare. Itaque singulis propositionibus & demonstrationibus, toto animo intendebas, & cum quinto Euclidis diligenter conferebas, cumq; duo incidimus, in traducendo, difficiliora (vnum,* minoris inæqualitatis rationes, quæ, quò minores sunt, eò altiores dicuntur, pro maioribus magnitudinibus vsuuenire. *alterum*, rationem ex ratione subtrahi, vel decomponi, per suæ compositionem conuersæ:) *intellexi non esse operis dispendium, mutatis mutandis, ex Euclide integram traductionem perficere, & exhibere. Tuque ipse iustum furtum, & honestißimum probasti: quòd non ab*

*om.*

*omnibus facilè probarentur peculiares propositiones, quæ sub illa unica continentur. & certè à me non possent commodè allegari, ad alia in sequentibus elementis demonstranda. Quos ergo semel approbasti labores meos, ut amicis & communices, & commendes, enixè rogo: nam non mihi soli, non paucis, sed omnibus laboro.*

*Vale.*

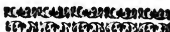




# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

## ELEMENTVM QVARTVM.

### DEFINITIONES.



1. DVarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, Altior, dicetur, ab æqualitate remotior.

2. Et Depressior, æqualitati propior.

3. Submultiplicata est ratio rationis, depressior, altioris, cum depressior, aliquoties composita, facit altiorem.

4. Multiplicata verò altior, depressioris; cum depressior, aliquoties composita, facit altiorem.

5. Ratio logarithmica dicetur, duarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, mutua quædam; secundùm altitudinem, vel depressionem habitudo.

6. Proportio logarithmica, dicetur, similitudo logarithmarum rationum, vel ad inuicem, vel ad alias rationes.

7. Rationem logarithmicam habere inter se rationes

dicen-

dicentur, quæ multiplicatæ, possunt se mutuò, altitudine superare.

8. In eadem ratione logarithmicè, dicuntur esse rationes duæ, prima, ad secundam, atque duæ quantitates, prima, ad secundam: cum primæ rationis, quælibet multiplicata ratio, & primæ quantitatis æquemultiplex, à secundę rationis qualibet multiplicata, & à secundæ quantitatis ęquemultiplici, vel vnà deficiunt, vel vnà æquales sunt, vel vnà excedunt; ratio quidem, altitudine, & quantitas ipsâ quantitate.

9. Et dicetur prima ratio ad secundam, proportionalis logarithmicè, sicut prima quantitas ad secundam.

10. Cum verò primę rationis multiplicata ratio, altior fuerit, quàm multiplicata secundæ; multiplex autem primę quantitatis, non maior fuerit, quàm multiplex secundæ: dicetur logarithmica ratio rationum, maior, quàm ratio quantitatum.

11. Cumque è contra, multiplex primæ quantitatis, maior fuerit multiplici secundæ; multiplicata autem ratio primæ rationis, non altior, quàm multiplicata, secundæ: dicetur ratio quantitatum, maior, quàm logarithmica ratio rationum.

12. Rursum in eadem ratione logarithmicè, dicentur esse rationes quatuor prima ad secundam, atque tertia ad quartã: cum primæ, ac tertiæ, rationes æquemultiplicatæ, à secundæ, & quartæ, rationibus æquemultiplicatis, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtraque, ab vtraque, vel

vel vnà altiores sunt, vel vnà æquealtæ, vel vnà depressiores, si eę sumantur, quæ inter se respondent.

13. Eamdem autem habentes rationem logarithmicam, rationes, logarithmicè proportionales vocentur.

14. Cum verò æquemultiplicatarum, multiplicata primæ rationis altior fuerit, quàm multiplicata secundæ; multiplicata autem tertiæ, non altior fuerit, quàm multiplicata quartæ: tunc prima ratio ad secundam, maiorem rationem logarithmicam habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

15. Homologæ rationes rationibus, aut quantitatibus dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.

16. Homologia logarithmica est sumptio homologarum rationum, aut & quantitatum, vt in alia quadam logarithmica proportionalitate, fiant homologæ.

17. Alterna ratio logarithmica, est rationum sumptio antecedentis comparatæ ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

18. Inuersa ratio logaritmica, est rationum sumptio consequentis, ceu antecedentis, comparatæ ad antecedentem, velut ad consequentem.

19. Compositio rationis logarithmicæ, est sumptio compositæ ex rationibus antecedenti, & consequenti, ceu vnius ad ipsam consequentem.

20. Diuisio rationis logarithmicæ, est sumptio rationis, quacum composita consequens facit antecedentem,

ad ipsam consequentem.

21. Conuersio rationis logarithmicæ, est sumptio antecedentis, ad eam, quacum composita consequens facit ipsam antecedentem.

22. Ex æqualitate ratio logarithmica est, si plures duabus sint rationes, & his, vel quantitates, vel aliæ rationes, multitudine pares, quæ binæ sumatur, & in eadem ratione logarithmica: cum vt in primis rationibus, prima logarithmicè se habet ad vltimam, sic in secundis vel rationibus, vel quantitatibus, prima ad vltimam sese habuerit. Vel aliter sumptio extremarum, per subductionem mediarum.

23. Ordinata proportio logarithmica est, tribus positis rationibus, & alijs, vel quantitatibus, vel rationibus, quę sint his multitudine pares: cum, vt in primis rationibus, logarithmicè se habet antecedens, ad consequentem; ita in secundis, vel quantitatibus, vel rationibus, antecedens ad consequentem: & vt in primis, consequens, ad aliam quampiam; sic in secundis, consequens, ad aliã quampiam.

24. Perturbata autem logarithmica proportio est: cum vt in primis, logarithmicè se habet antecedens, ad consequentem; ita in secundis, antecedens ad consequentem: & vt in primis, consequens, ad aliam quampiam; sic in secundis, alia quæpiam, ad antecedentem.

*Theor.*

*Theor. 1. Prop. 1.*

SI sint quotcunque rationes, quotcunque rationum, æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplicatæ: quàm multiplicata est vna, vnius; tàm multiplicata est composita omnium, compositæ omnium.

*Hypoth.*

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*.

*c*3; *d*3: æquemultiplicata *c*; *d*:

Dico *a*3; *b*3, +*c*3; *d*3: æquemultiplicatam *a*; *b*, +*c*; *d*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*. |
| *hypoth.* | *c*3; *d*3: *c*; *d*; + *c*; *d*, + *c*; *d*: |
| *p. p.* | *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*. |
| *hypoth.* | Multitudo rationum *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: æqualis est multitudini *c*; *d*, & *c*; *d*, & *c*; *d*: necnon multitudini *a*; *b*, + *c*, *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*. |
| *def. 4. b.* | *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: æquemultiplicata *a*; *b*, + *c*; *d*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 2. Prop. 2.*

SI prima ratio, secundæ, fuerit æquemultiplicata, atque prima quantitas, est multiplex secundæ; fuerit autem & tertia ratio, secundæ, æquemultiplicata, atque tertia

quantitas, eſt multiplex ſecundæ: erit compoſita ratio ex prima, & tertia, ſecundæ, æquemultiplicata, atque aggregata quantitas ex prima, & tertia, eſt multiplex ſecundæ.

*Hypoth.*

*a*2; *b*2: multiplicata *a*; *b*. ſicut 2*c*; *c*, multiplex.
*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex.
Dico *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicatam *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplicem.

*Demonſtr.*

*hypoth.* | *a*2; *b*2: *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c*: *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt *c*, & *c*, quantitates.

*hypoth.* | *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b* ſicut 3*c*: *c* + *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*.

*p. p.* | *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*: *c* + *c* + *c* + *c* + *c*. & quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*; & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*, & *c*, & *c*.

*def.4.h.* | *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*: ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplex. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 3. Prop. 3.*

SI prima ratio, ſecundæ, æquèfuerit multiplicata, atque tertia, quartæ; fuerit autem & quinta; ſecundæ,

dæ, æquemultiplicata, atque ſexta, quartæ: erit & compoſita ex prima, & quinta, ſecundæ æquemultiplicata, atq; compoſita ex tertia, & ſexta, quartæ.

*Hypoth.*

*a2; b2*: multiplicata *a; b*. ſicut *c2; d2*: multiplicata *c; d*.

*a3; b3*: multiplicata *a; b*. ſicut *c3; d3*: multiplicata *c; d*.

Dico *a2; b2,+a3; b3*: multiplicatam *a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3*: multiplicatam *c; d*.

*Demonſtr.*

*hypoth.* | *a2; b2: a; b,+a; b*. ſicut *c2; d2: c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*.

*hypoth.* | *a3; b3: a; b,+a; b,+a; b*. ſicut *c3; d3: c; d,+c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*, & *c; d*.

*p. p.* | *a2; b2,+a3; b3: a; b,+a; b,+a; b,+a; b,+a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3: c; d,+c; d,+c; d,+c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*, & *a; b*, & *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*, & *c; d*, & *c; d*, & *c; d*.

*def.4.h.* | *a2; b2,+a3; b3*: multiplicata *a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3*: multiplicata *c; d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.*

*Theor. 4. Prop. 4.*

SI prima ratio, ſecundæ æquemultiplicata fuerit, atque prima quantitas, ſecundæ; ſumantur autem ratio, & quantitas; & ſumpta ratio, ſit ęquemultiplicata primæ rationis, atque ſumpta quantitas, multiplex primæ quantitatis: erit & ex æquo, ſumpta ratio, ęquemultiplicata ſecundæ rationis, atque ſumpta quantitas, ſecundæ quantitatis.

*Hypoth.*

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex.
*a*6; *b*6: multiplicata *a*3; *b*3. ſicut 6*c*; 3*c*, multiplex.

Dico *a*6; *b*6: multiplicatam *a*; *b*. ſicut 6*c*; *c*, multiplicem.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| hypoth. | *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex: |
| 2. *b*. | *a*3; *b*3, + *a*3, *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c* + 3*c*; *c*, multiplex. |
| hypoth. | *a*6; *b*6: *a*3; *b*3, + *a*3; *b*3. ſicut 6*c*: 3*c* + 3*c*. Et quot ſunt, *a*3; *b*3, & *a*3; *b*3: tot ſunt 3*c*, & 3*c*. |
| | *a*6; *b*6: multiplicata *a*; *b*. ſicut 6*c*; *c*, multiplex. Quod &c. Quare &c. |

*Theor. 5. Prop. 5.*

SI prima ratio, ſecundæ æquemultiplicata fuerit, atque tertia, quartæ; ſumantur autem æquemultiplicatæ rationes,

tiones, primæ, & tertiæ: erit & ex æquo, sumptarum vtraque, vtriusque, æquemultiplicata; altera quidem secundę, altera autem quartæ.

*Hypoth.*

$a3$; $b3$: multiplicata $a$; $b$. sicut $c3$; $d3$: multiplicata $c$; $d$.

$a6$; $b6$: multiplicata $a3$; $b3$. sicut $c6$; $d6$: multiplicata $c3$; $d3$.

Dico $a6$; $b6$: multiplicatam $a$; $b$. sicut $c6$; $d6$: multiplicatam $c$; $d$.

*Demonstr.*

*hypoth.* | $a3$; $b3$: multiplicata $a$; $b$. sicut $c3$; $d3$: multiplicata $c$; $d$.

3. b. | $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$: multiplicata $a$; $b$. sicut $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$: multiplicata $c$; $d$.

*hypoth.* | $a6$; $b6$: $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$. sicut $c6$; $d6$: $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$. Et quot sunt $a3$; $b3$, & $a3$; $b3$: totidem sunt $c3$; $c3$, & $c3$; $d3$.

| $a6$; $b6$: multiplicata $a$; $b$. sicut $c6$; $d6$: multiplicata $c$; $d$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 6. Propos. 6.*

SI fuerint, in eadem ratione logarithmica, prima ratio, ad secundam, atque prima quantitas, ad secundam: etiam multiplicata primæ rationis, & æquemultiplex primæ quantitatis, ad multiplicatam, secundæ rationis, & æque-

æquemultiplicem secundæ quantitatis, in eadem erunt logarithmica ratione.

*Hypoth.*

Sint rationes *A*, & *B*; & quantitates *a*, & *b*: & sit ratio *A*, ad rationem *B*, logarithmicè; sicut quantitas *a*, ad quantitatem *b*. Sitque ratio 3*A*, multiplicata rationis *A*; sicut quantitas 3*a*, multiplex quantitatis *a*: item ratio 4*B*, multiplicata rationis *B*; sicut quantitas 4*b*, multiplex quantitatis *b*.

Dico rationem 3*A*, ad rationem 4*B*, esse logarithmicè sicut quantitas 3*a*, ad quantitatem 4*b*.

*Præpar.*

Accipiatur ratio 6*A*, multiplicata rationis 3*A*; & quantitas 6*a*, æquemultiplex quantitatis 3*a*: item ratio 20*B*, multiplicata rationis 4*B*; & quantitas 20*b*, ęquemultiplex quantitatis 4*b*.

*Demonstr.*

4. *h.* Ratio 6*A*, æquemultiplicata est rationis *A*; atque quantitas 6*a*, multiplex est quantitatis *a*. item ratio 20*B*, æquemultiplicata est rationis *B*; atque quantitas 20*b*, multiplex est quantitatis *b*.
*hypoth.* Sunt autem rationes *A* ad *B* logarithmicè,
*def.8.b.* sicutquantitates *a* ad *b*. Ergo si ratio 6*A*, est altior ratione 20*B*; etiam quantitas 6*a*, maior est quantitate 20*b*: si ęquealta; æqualis: si depressior; minor.
*constr.* Sed est ratio 6*A*, æquemultiplicata rationis 3*A*; atque quantitas 6*a*, multiplex

tiplex quantitatis $3a$: & ratio $20B$, rationis $4B$, æquemultiplicata eſt; atque quantitas $20b$, quan-
def. 8. b. titatis $4b$. Ergo rationes $3A$, ad $4B$, ſunt logarithmicè; ſicut quantitates, $3a$, ad $4b$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 7. Prop. 7.*

SI prima ratio, ad ſecundam, eamdem habuerit rationem logarithmicè, atque tertia, ad quartam: etiam æquemultiplicatæ rationes primæ, & tertiæ, ad æquemultiplicatas ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eamdem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

*Hypoth.*

Sunto rationes quatuor $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, logarithmicè proportionales: & ſunto ipſarum $A$, $C$, æquemultiplicatæ rationes $3A$, $3C$: necnon ipſarum $B$, $D$, æquemultiplicatæ, $4B$; $4D$.

Dico quatuor rationes $3A$ ad $4B$, & $3C$ ad $4D$, logarithmicè proportionales eſſe.

*Præpar.*

Sumantur ipſarum $3A$, $3C$, æquemultiplicatæ rationes $6A$, $6C$: & ipſarum $4B$, $4D$, æquemultiplicatæ, $20B$, $20D$.

*Demonſt.*

4. b. Rationes $6A$, $6C$, æquemultiplicatæ ſunt rationum, $A$, $C$: & $20B$, $20D$, æquemultiplicatæ

*hypoth.* sunt rationum *B*, *D*. suntque *A* ad *B*, logarithmicè proportionales, vt *C* ad *D*. Ergo si 6*A*, altior est, quàm 20*B*; etiam 6*C*, altior est, quàm 20*D*: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Et sunt 6*A*, 6*C*, ipsarum 3*A*, 3*C*, æquemultiplicatæ; necnon 20*B*, 20*D*, ipsarum 4*B*, 4*D*, æquemultiplicatæ. Ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*C* ad 4*D*, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

*def.12.b* *hypoth.* *def.12.b*

Quare &c.

---

*Theor.* 8. *Prop.*

SI fuerint duæ rationes, singulæ, ex binis compositæ, altiores, ex depressioribus, & quodammodo totæ, ex abscissa, & residua: fuerit autem vna tota ratio, ad alteram totam, æquemultiplicata; atque sua abscissa, ad alterius abscissam: erit & æquemultiplicata; atque sua residua, ad alterius residuam.

*Hypoth.*

Ratio *A*+*B*, ex rationibus *A*, & *B*, altior, ex depressioribus, componitur; item *C*+*D* ratio, ex rationibus *C*, & *D*, componitur: & esto *A*+*B*, ad *C*+*D*, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

Dico *A*+*B* ad *C*+*D*, æquemultiplicatam etiam esse, atque *B* ad *D*.

*Præpar.*

Fiat ratio *G* ad *D*, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

De-

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| p. h. | $A+G$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque $A$ ad $C$. |
| hypoth. | $A+B$ ad $C+D$, ęquemultiplicata eſt, atque $A$ ad $C$. |
| p. p. | $A+B$ ratio, eadem eſt, quæ $A+G$. |
| | Et compoſita vtrimque conuerſa rationis $A$, |
| p. p. | $B$ ratio, eadem eſt, quæ $G$. |
| p. p. | $B$ ad $D$, æquemultiplicata eſt, atque $A$ ad $C$. |
| p. h. | $A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque $B$ ad $D$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 9. Prop. 9.*

SI ratio, & quantitas, cuiuſdam rationis, & cuiuſdam quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex; & abſciſſa ratio, & abſciſſa quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex: reſidua ratio, & reſidua quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, vel ſunt æquealta, & æqualis; vel æquè ſunt multiplicata, & multiplex.

*Hypoth.*

Ratio $A+B$, rationis $C$, æquemultiplicata eſt, atque quantitas $a+b$, multiplex quantitatis $c$; & ratio $A$, rationis $C$, æquemultiplicata eſt, atque quantitas $a$, multiplex quantitatis $c$.

Dico quòd, vel $B$ æquealta eſt ipſi $C$; ſicut $b$, æqualis ipſi $c$: vel $B$ æquemultiplicata eſt ipſius $C$; ſicut $b$

multiplex ipsius $c$.

*Demonstr.*

*hypoth.* Numerus rationum $C$, ex quibus $A+B$ componitur, idem est qui quantitatum $c$, ex quibus $a+b$ colligitur: item numerus rationum $C$ ex quibus $A$ componitur, idem est qui quantitatum $c$, ex quibus $a$ componitur. Quorum numerorum, vel est differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas est differentia; vna est ratio $C$, quacum composita ratio $A$, facit rationem $A+B$; & vna est quantitas $c$, quacum composita quantitas *hypoth.* $a$, facit quantitatem $a+b$. Sed & $B$ ratio est, quacum composita $A$, facit rationem $A+B$; & $b$ quantitas est, quacum composita $a$, facit quantitatem $a+b$. Ergo $B$ ęquealta est ipsi $C$; atque $b$ æqualis ipsi $c$.

Si verò numerus est differentia, tot sunt rationes $C$, quibuscum composita ratio $A$, facit rationem $A+B$; totidemque sunt quantitates $c$, quibus cum composita quantitas $a$, facit quantita- *hypoth.* tem $a+b$. Sed $B$ ratio est, quacum composita ratio facit rationem $A+B$; & $b$ quantitas, quacum composita quantitas $a$, facit quantitatem $a+b$. Ergo quot ex $C$ rationibus componitur $B$; tot ex $c$, quantitatibus componitur $b$. Ergo $B$ ad $C$, æquemultiplicata est, atque $b$ ad $c$, mul- *def.4.b.* tiplex. Ergo $B$ ad $C$, vel æquealta est: atque

$b$ ad

*b* ad *c*, æqualis: vel æquemultiplicata eſt; atque multiplex. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 10. *Prop.* 10.

SI duæ rationes, duarum rationum, ſint æquemultiplicatæ; & abſciſſæ quædam, ſint earumdem æquemultiplicatæ: & reſiduæ, eiſdem, aut æquealtæ ſunt, aut æquemultiplicatæ.

*Hypoth.*

Ratio *A*+*B*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque ratio *D*+*E*, rationis *F*; & ratio *A*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque ratio *D*, rationis *F*.

Dico rationem *B* rationis *C*, æquealtam eſſe, atque ratio *E* rationis *F*; vel æquemultiplicatam.

*Demonſtr.*

*hypoth.* Quot ex *C* rationibus, ratio *A*+*B* componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex *F* rationibus, componitur ratio *D*+*E*. & quot ex *C* rationibus, ratio *A* componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex *F* rationibus, ratio *D* componitur: quorum numerorum vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia: vna eſt ratio *C*, quacum compoſita ratio *A*, facit rationem *A*+*B*; & vna eſt ratio *F*, quacum compoſita ratio *D*, facit rationem *D*+*E*. Sed & *B* cum *A*, & *E* cum *hypoth.*

*D*, fa-

D, faciunt rationes compositas $A+B$, & $D+E$. Ergo $B$ ad $C$ eadem est, & æquealta, atque ratio $E$ ad $F$. si enim binæ non essent æquealtę; esset vna binarum, æqualitati propior, quàm altera, & non essent eędem inter se.

Si verò numerus est differentia: totidem sunt rationes $C$, quibuscum ratio $A$ composita, facit $A+B$ rationem; quot etiam rationes $F$, quibuscum ratio $D$ composita, facit $D+E$ rationem.

*hypoth.* Sed & $B$ cum $A$, & $E$ cum $D$, faciunt rationes

*def.4.h.* compositas $A+B$, & $D+F$. Ergo $B$ ad $C$ ęquemultiplicata est, atque $E$ ad $F$. Ergo $B$ ad $C$, vel æquęalta est, vel æquemultiplicata, atque $E$ ad $F$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 11. Propos. 11.*

Æ Quealtæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam: & eadem, ad ęquealtas.

*Hypoth.*

Rationes $A$, & $B$ sunt æquealtæ.

Dico $A$ rationem, ad $C$, esse logarithmicè, vt $B$, ad $C$. Et $C$ rationem, ad $A$, esse logarithmicè, vt $C$, ad $B$.

*Præpar.*

Sumantur ipsarum $A$, $B$, æquemultiplicatæ rationes $D$, $E$: & sumatur $F$ ratio multiplicata, rationis $C$.

De-

*Demonstr.*

*def.5.b.* Quoniam *A* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est ratio *C*, eiusdẽ est & *A*: item quoniam *B* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est *C*, eiusdem est & *B*: ergo *A*, *B* rationes, eiusdem inter se sunt inæqualitatis: & sunt *A*, *B* æquealtæ: ergo sunt eædem inter se. si enim non essent eædem inter se, esset vna remotior ab ęqualitate, quàm altera, & non essent ęquealtæ. Sumptæ autem sunt *D*, *E* æquemultiplicatæ rationum *A*, *B* earumdem inter se: ergo

*p. p.* etiam *D*, *E*, sunt eædem inter se rationes, & æquealtę. Ergo si *D* est altior, quàm *F*, etiam *E* altior est, quàm *F*: si æquealta; æquealta: si de-

*def.12.b* pressior; depressior. Ergo ratio *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut ratio *B* ad *C*. Quod &c. Necnon ratio *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut *C* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 12. Prop. 12.*

Rationum non æquealtarum, altior ad eandem, maior est logarithmicè, quàm depressior: & eadem ad depressiorem, maior est logarithmicè, quàm ad altiorem.

*Hypoth.*

Esto ratio *A*+*B* altior, quàm *B*.

Dico *A*+*B*, ad *C*, maiorem esse logarithmicè, quàm *B*, ad *C*. Et

Et $C$, ad $B$, maiorem logarithmicè, quàm $C$, ad $A+B$.

*Præpar. & Demonstr.*

Sumatur $A$ ratio, quæ cum $B$, componit rationem $A+B$: & duarum rationum $A, B$, ſumatur altera non altior, quæ ſit $A$: & rationis $A$, totuplicata $D$, quoties oportet, vt fiat altior, quàm $C$; & rationis $B$, æquemultiplicata ſumatur $E$.

*def.7.h.*

Quoniam $A$, non eſt altior, quàm $B$; & $D, E$ ſunt æquemultiplicatæ ipſarum $A, B$: oportet $D$ non eſſe altiorem, quàm $E$. ſi enim eſſet altior; ex iiſdem, vel ex propioribus æqualitati, vtriſq; maioris, vel vtriſque minoris inęqualitatis rationibus, eſſet remotior ab ęqualitate ratio compoſita. ergo $D$, eſt altior, quàm $C$: ergo $E$, eſt altior, quàm $C$.

*cõtra p. p. & p.3.*

Sumatur ipſius $C$, bis, ter, quater, vel deinceps, quoties oportet, multiplicata ratio $F$, vt fiat primò altior quàm $E$. Quare ratio $F$, non eſt altior, quàm ratio $E+C$: eſt autem $D$ altior, quàm $C$: ergo $D+E$ altior eſt, quàm $E+C$. alioquin ex remotioribus ab æqualitate rationibus, vtriſque maioris, vel vtriſque minoris inæqualitatis, non altior fieret compoſita ratio, ideoque non remotior ab æqualitate, *contra p.p. & p. 3.* Sed $F$. non eſt altior, quàm $E+C$: ergo $D+E$, eſt altior, quàm $F$: & eſt $E$ depreſſior, quàm $F$: & ſunt $D, E$ rationes æquemultiplicatæ, rationum $A, B$: & $D+E$ ratio, eſt ęquemultiplicata, rationis $A+B$:

*def.7.h.*

*p. h.*

Ergo

def. 14. h. Ergo $A+B$ ratio, ad rationem $C$, maior est logarithmicè, quàm $B$ ad $C$. Quod &c. Et ratio
def. 14. h. $C$, ad rationem $B$, maior est logarithmicè, quàm $C$, ad $A+B$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 13. *Prop.* 13.

QVæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicę: & ad quas eadem, eamdem habet logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicæ.

*Hypoth.* 1.

Ratio $A$ ad rationem $C$, esto logarithmicè, sicut ratio $B$ ad rationem $C$.

Dico rationes $A$, $B$, esse easdem inter se.

*Demonstr.*

Quoniam $A$ ad $C$, & $B$ ad $C$, sunt rationes
def. 5. h. logarithmicæ; cuius inęqualitatis est $C$ ratio, maioris, vel minoris; eiusdem sunt $A$, & $B$ rationes: quæ si non eædem essent inter se, non essent æquealtæ: & assignaretur earum altera altior. Assignetur
12. h. $A$, si fieri potest, altior, quàm $B$: ergo $A$ ad $C$, maior est logarithmicè, quàm $B$. *contra hypoth.* Ergo rationes $A$, $B$, sunt eædem inter se. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Ratio $C$, ad rationem $A$, esto logarithmicè, sicut ratio $C$, ad rationem $B$.

Dico rationes *A*, *B*, esse easdem inter se.

*Demonstr.*

12. *b.* Assignetur *A*, si fieri potest depressior, quàm *B*: Ergo *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*: *contra hypoth.* Ergo *A* non est depressior, quàm *B*: item demonstrabitur, quod neque *B*
11. *b.* est depressior, quàm *A*: sunt ergo *A*, *B* rationes æquealtæ, & eædem inter se. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 14. *Prop.* 14.

RAtionum, ad eamdem rationem, quæ maior est logarithmicè, illa est altior: & ad quàm, eadem maior est logarithmicè, illa est depressior.

*Hypoth.* 1.

Ratio *A*, maior est logarithmicè ad *C*, quàm *B*.

Dico *A*, altiorem esse, quàm *B*.

*Demonstr.*

Esto *A* non altior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel depressior. Sunto *A*, *B*
11. *b.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut *B*. *contra hypoth.* Esto *A* depres-
12. *b.* sior, quàm *B*, si fieri potest. Ergo *B* ad *C*, minor est logarithmicè, quàm *A*. *contra hypoth.* Ergo *A*, non est, æquealta, neque depressior, quàm *B*: ergo est altior. Quod &c.

*Hy-*

*Hypoth.* 2.

Ratio *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*.
Dico *A*, depressiorem esse, quàm *B*.

*Demonstr.*

Esto *A* non depressior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel altior. Sunto *A*, *B*
11. *h.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut ad *B*. *contra hypoth.* Esto *A* altior,
12. *h.* quàm *B*, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, minor est logarithmicè, quàm ad *B*. *contra hypoth.* Ergo *A* non est æquealta, neque altior, quàm *B*: ergo est depressior. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 15. *Prop.* 15.

QVæ eidem sunt eædem rationes, inter se sunt eędem, tùm logarithmicè, tùm absolutè.

*Hypoth.* 1.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, vt quantitates *e* ad *f*.

Dico rationes *A* ad *B*, logarithmicè esse, sicut quantitates *e* ad *f*.

*Hypoth.* 2.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, sunt sicut logarithmicè rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut rationes *E* ad *F*.

 *Hy-*

*Hypoth.* 3.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, ſicut quantitates *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b*, eſſe vt *e* ad *f*.

*Hypoth.* 4.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, vt rationes *E* ad *F*.

Dico quantitates *a* ad *b* eſſe, ſicut logarithmicè, rationes *E* ad *F*.

*Hypoth.* 5.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè, vt rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B* logarithmicè eſſe, ſicut rationes *E* ad *F*.

*Præpar. comm.*

Sumantur ipſarum rationum, vel quantitatum *A*, *C*, *E*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 3*A*, 3*C*, 3*E*: necnon ipſarum *B*, *D*, *F*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 4*B*, 4*D*, 4*F*.

*Demonſtr. comm.*

def. 8 vel 12. h. vel 65. Si 3*A*, altior eſt, vel maior, quàm 4*B*; etiam 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*. Quod ſi 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*; etiam 3*E* altior eſt, vel maior, quàm 4*F*. Ergo ſi 3*A* altior eſt,

vel

vel maior, quàm $4B$; etiam $3E$ altior est, vel maior, quàm $4F$. Item si æquealta, vel æqualis; etiam æquealta, vel æqualis: si depressior, vel minor; etiam depressior, vel minor. Ergo proportionales sunt siue rationes, siue quantitates, vel mixtim $A$ ad $B$, sicut $E$ ad $F$: tùm logarithmisiè, siquæ sunt rationes; tùm absolutè, si nullæ sunt rationes, sed solùm quantitates. Quod &c.

def 8 vel 12. h. vel 6. 5.

Quare &c.

---

*Theor. 16. Prop. 16.*

SI sint quotcunque rationes logarithmicè proportionales, quemadmodum se habuerit logarithmicè vna antecedentium ad vnam consequentium; ita logarithmicè se habebit composita ex omnibus antecedentibus, ad compositam ex omnibus consequentibus.

*Hypoth.*

Rationes $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, & $E$ ad $F$, sunt logarithmicè proportionales. Ex rationibus $A$, $C$, & $E$ composita est $A+C+E$: & ex rationibus $B$, $D$, & $F$ composita est $B+D+F$.

Dico $A+C+E$ ad $B+D+F$, & $A$ ad $B$, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Rationum $A$, $C$, $E$ sumantur æquemultiplicatæ rationes $3A$, $3C$, $3E$: ex quibus composita ratio $3A+3C+3E$. Item rationum $B$, $D$, $F$, sumantur æquemultiplicatæ

catæ rationes $4B$, $4D$, $4F$: ex quibus composita ratio $4B+4D+4F$.

*Demonstr.*

def.12.h Quoniam $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, sunt logarithmicè proportionales: si $3A$ altior est, quàm $4B$; etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Item quoniam $C$ ad $D$, & $E$ ad $F$, sunt logarithmicè proportionales: si $3C$ altior est, quàm $4D$; etiam $3E$, altior est, quàm $4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo si $3A$, altior est, quàm $4B$: etiam $3A+3C+3E$ altior est quàm $4B+4D+4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; de-
p. b. pressior. & est $3A+3C+3E$ ad $A+C+E$, totuplicata, quotuplicata est $3A$ ad $A$: item $4B+4D+4F$, ad $B+D+F$. totuplicata est, quotupli-
def.12.h cata $4B$ ad $B$. Ergo $A+C+E$ ad $B+D+F$, & $A$ ad $B$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 17. Propos. 17.*

SI sex vel rationum, vel & quantitatum mixtim, prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: etiam prima ad secundam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam.

*Hy-*

*Hypoth.* 1.

Quantitates *a* ad *b*, & *c* ad *d*, sunt proportionales: sed quantitatum *c* ad *d* ratio, maior est, quàm logarithmica, *E* ad *F* rationum.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem esse, quàm logarithmica *E* ad *F* rationum.

*Hypoth.* 2.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: sed rationum logarithmica ratio *C* ad *D*, maior est quàm quantitatum *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b* maiorem esse, quàm *e* ad *f*.

*Hypoth.* 3.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d*, sunt logarithmicè proportionales: sed quantitatum ratio *c* ad *d*, maior est, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum logarithmicam *A* ad *B*, maiorem esse, quàm *e* ad *f*.

*Hypoth.* 4.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: sed rationum *C* ad *D* logarithmicè maior est, quàm *E* ad *F*.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem esse, quàm rationum logarithmica *E* ad *F*.

*Hypoth.* 5.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d* sunt proportionales logarithmicè: sed quantitatum *c* ad *d*, maior est rato, quàm logarithmica rationum *E* ad *F*.

Dico

Dico *A* ad *B*, maiorem esse logarithmicè, quàm *E* ad *F*.

*Hypoth.6.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt proportionales: sed *C* ad *D* ratio, logarithmicè maior est, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum *A* ad *B* logarithmicam rationem, maiorem esse, quàm quantitatum *e* ad *f*.

*Hypoth.7.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt proportionales: sed *C* ad *D* rationum ratio logarithmicè maior est quàm *E* ad *F* ratio logarithmica.

Dico *A* ad *B* logarithmicè maiorem esse, quàm *E* ad *F*.

*Præpar.comm.*

Sumantur æquemultiplicatę rationum rationes, & ęquemultiplices quantitatum quantitates; antecedentium *A*, *C*, *E*, antecedentes 3*A*, 3*C*, 3*E*; & consequentium *B*, *D*, *F* consequentes 4*B*, 4*D*, 4*F*: secundum eas multiplicationes; quibus 3*C*, altior quidem est, vel maior, quàm 4*D*; sed 3*E*, non altior, vel non maior est, quàm 4*F*.

*Demonstr. commun.*

*def 8 vel 12.h. vel 6. 5.* Quoniam 3*C* est altior, vel maior, quàm 4*D*: ergo etiam 3*A* est altior, vel maior, quàm 4*B*: & *def. 10. vel 11. vel 14.h vel 8.5.* interim 3*E* non altior est, vel non maior, quàm 4*F*. ergo *A* ad *B*, maior est, quàm *C* ad *D*, siuè logarithmicè, siuè absolutè. Quod &c.

Quare &c.

---

Theo-

*Theor.* 18. *Prop.* 18.

Rationum logarithmicè proportionalium, si prima fuerit altior, quàm tertia: erit & secunda altior, quàm quarta: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior.

*Hypoth. commun.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales.

*Hypoth.* 1.

Altior est ratio *A*, ratione *C*.

Dico, quòd altior est ratio *B*, ratione *D*.

*Demonstr.*

Esto, si fieri potest, non altior *B* ratio, quàm *D*: ergo vel est æquealta, vel depressior. Esto si
12. *h.* fieri potest æquealta. Ergo *A* ad *B*, maior est
11. *h.* logarithmicè, quàm *C* ad *B*: sed *C* ad *B* eadem
17. *h.* est logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad *B* maior est logarithmicè quàm *C* ad *D*, *contra hypoth.* Non sunt ergo *B*, *D* rationes æquealtæ.

12. *h.* Esto, si fieri potest, *B* depressior, quàm *D*. Ergo *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *C* ad
*hypoth.* *D*. Sed *A* ad *B*, est logarithmicè, vt *C* ad *D*. Er-
17. *h.* go *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *A* ad
14. *h.* *B*. Ergo *C* altior est, quàm *A*. *contra hypoth.* Non est ergo *B* depressior, quàm *D*; neque æquealta: ergo *B* est altior, quàm *D*. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico quòd & æquealtæ ſunt rationes *B*, *D*.

*Demonſt.*

Sunto *B*, *D* non æquealtæ, ſi fieri poteſt: &
12. *h.* eſto *B* altior, quàm *D*. Ergo *C* ad *D*, maior
*hypoth.* eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Sed *A* ad *B*, ea-
17. *h.* dem eſt logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad
14. *h.* *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo *A*, altior eſt, quàm *C*. *contra hypoth.* Sunt ergo *B*, *D* æquealtæ. Quod &c.

*Hypoth.*

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico quòd & *B* depreſſior eſt, quàm *D*.

*Demonſtr.*

*hypoth.* Altior eſt *C* quàm *A*: & eſt *C* ad *D* logari-
*ſup.* thmicè, vt *A* ad *B*: ergo altior eſt *D*, quàm *B*:
*def.* 2. *h.* ergo depreſſior eſt *B*, quàm *D*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 19. *Prop.* 19.

SVbmultiplicatæ rationes, cum pariter multiplicatis, in eadem ſunt ratione logarithmica, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

*Hypoth.*

Rationũ *A*, *B*, ſunt æquemultiplicatę rationes 3 *A*, 3 *B*.

Dico *A* ad *B*, atque 3 *A* ad 3 *B*, eſſe logarithmicè proportionales.

*De-*

*Demonstr.*

Rationes *A* ad *B*, & *A* ad B, & *A* ad B, quotcunque oportet, acceptæ, sunt proportionales: ergo ex antecedentibus composita 3*A*, ad ex consequentibus compositam 3B, est logarithmicè, vt *A* ad B. Quod &c.

*16. b.*

Quare &c.

---

*Theor. 20. Prop. 20.*

RAtiones logarithmicè proportionales, permutando, sunt logarithmicè proportionales.

*Hypoth.*

Sint rationes logarithmicè proportionales, *A* ad B, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, esse logarithmicè proportionales, *A* ad *C*, vt B ad *D*.

*Præpar.*

Rationum *A*, *B*, sumantur æquemultiplicatæ 3*A*, 3B: & rationum *C*, *D*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*D*.

*Demonstr.*

*19. b.* Rationes 3*A* ad 3*B*, & *A* ad *B*, sunt lo-
*hypoth.* garithmicè proportionales. item *A* ad *B*, & *C*
*19. b.* ad *D*. item *C* ad *D*, & 2*C* ad 2*D*. Ergo
*15. b.* 3*A* ad 3*B*, & 2*C* ad 2*D* sunt logarithmicè
*18. b.* proportionales. Ergo si 3*A*, est altior, quàm 2*C*; etiam 3*B*, est altior, quàm 2*D*: si æque-
*def. 12. b* alta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo *A*

 ad *C*,

ad $C$, & $B$ ad $D$, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 21. *Prop.* 21.

Rationes inter ſe, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, diuidendo, ſunt logarithmicè proportionales.

*Hypoth.* 1.

Rationes $A+B$ ad $B$, & $C+D$ ad $D$, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo rationes $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, eſſe logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Sumantur ipſarum $A$, $B$, $C$, $D$, æquemultiplicatæ $3A$, $3B$, $3C$, $3D$: necnon ipſarum $C$, $D$, aliæ quælibet æquemultiplicatæ $4C$, $4D$.

*Demonſtr.*

Rationes $3A$, $3B$, ęquemultiplicatæ ſunt ra-
*p. h.* tionum $A$, $B$: Ergo ratio $3A+3B$ totuplicata
*conſtr.* eſt rationis $A+B$, quotuplicata eſt $3A$ ipſius
*p. h.* $A$: necnon $3C$, & $3D$ ipſarum $C$, & $D$: necnon ratio $3C+3D$ rationis $C+D$.

*conſtr.* Rationes quoque $3C$, $3D$, rationum $C$, $D$; & rationes $4C$, $4D$, earumdem $C$, $D$ ratio-
*3. h.* num ſunt æquemultiplicatæ: ergo etiam $7C$, $7D$, earumdem $C$, $D$ rationum ſunt æquemultiplicatæ. Et

*hypoth.* Et quoniam rationes $A+B$ ad $B$, & $C+D$
*def.12.b* ad $D$, sunt logarithmicè proportionales: si $3A+3B$, altior est, quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior.

Sed si $3A$ altior est, quàm $4B$; adcomposita communi ratione $3B$; etiam $3A+3B$ altior est,
*4. 3.* quàm $7B$. nam eiusdem maioris, vel eiusdem minoris inæqualitatis, ex remotioribus rationibus ab æqualitate, composita ratio, est remotior; & ex propioribus, propior. & ostensum est, quòd si $3A+3B$, altior est quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: & seposita communi ratio-
*4. 3.* ne $3D$; altior est $3C$, quàm $4D$. nam si, $3C$, non esset altior, quàm $4D$: composita, $3D$; fieret ratio $3C+3D$, non altior, quàm $7D$. *contra superius probata*.

Ergo si $3A$ altior est, quàm $4B$, etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: similiter ostendetur, si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo $A$ ad
*def.12.b* $B$, est logarithmicè, vt $C$ ad $D$. Quod &c.

*Hypoth.2.*

Rationes $A+B$ ad $B$, & quantitates $a+b$ ad $b$, sunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo, rationes $A$ ad $B$, & quantitates $a$ ad $b$ esse logarithmicè proportionales.

*Præ-*

*Præpar.*

Rationum $A$, $B$, & quantitatum $a$, $b$, ſumantur ęque-multiplicatę rationes $3A$, $3B$, & æquemultiplices quantitates $3a$, $3b$. item rationis $B$, & quantitatis $b$, multiplicata ratio $4B$, & æquemultiplex quantitas $4b$.

*Demonſtr.*

p. h. Ratio $3A+3B$, totuplicata eſt rationis $A+B$,
conſtr. quotuplicata eſt $3A$, ipſius $A$; & quantitas $3a$,
p. 5. quantitatis $a$; & quantitas $3b$, quantitatis $b$; & quantitas $3a+3b$, quantitatis $a+b$.

conſtr. Quantitates quoque $3a$, $3b$, quantitatum $a$, $b$; & quantitates $4a$, $4b$, earumdem $a$, $b$, ſunt
2. 5. æquemultiplices: ergo $7a$, $7b$, earumdem $a$, $b$, ſunt æquemultiplices.

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad $B$, & quantitates $a+b$ ad $b$, ſunt logarithmicè proportiona-
def 8. h. les: ſi $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$; etiam $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$: ſi æquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor.

ſup. Sed ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$: & ſi $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$; etiam, dempta communi $3b$, relinquitur $3a$, maior quàm $4b$. Ergo ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3a$, maior eſt, quàm $4b$: & ſimiliter oſtendetur, ſi æquealta; æquali: ſi de-
def. 8. h. dreſſior; minor. Ergo rationes $A$ ad $B$, & quantitates $a$ ad $b$, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c. Quare &c.

*Theor. 22. Prop. 22.*

Rationes inter se, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, componendo, sunt logarithmicè proportionales.

*Hypoth. 1.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes *A+B* ad *B*, & *C+D* ad *D*, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Assumatur *E* ratio, ad quàm *C+D* sit logarithmicè, sicut *A+B* ad B.

*Demonstr.*

*constr.* Quoniam *A+*B ad B, & *C+D* ad *E*, sunt lo-
*21. h.* garithmicè proportionales: ergo diuidendo *A*
ad B, & *C+D—E* ad *E*, sunt logarithmicè
*hypoth.* proportionales. Sed *A* ad B, & *C* ad *D* sunt
*15. h.* logarithmicè proportionales. Ergo *C* ad *D*, &
*C+D—E* ad *E*, sunt logarithmicè proportionales. Ergo *D*, æquealta est, ideoque eadem, atque *E*.

*18. h.* Nam si *D*, esset altior, quàm *E*: esset *C* altior,
*4. 3.* quàm *C+D—E*. Sed contra, esset *C+D* altior,
*4. 3.* quàm *C+E*: & *C+D—E*, altior, quàm *C*: quod est contradictio. Rursum si *D*, esset depressior,
*18. h.* quàm *E*: esset *C*, depressior, quàm *C+D—E*.
*4. 3.* Sed contra, esset *C+D*, depressior; quàm *C+E*:

&

4. 3. & $C+D-E$, depressior, quàm $C$: quod est contradictio.

Ergo $D$ eadem est, atque $E$. Ergo $C+D$ ad
18. *h.* $D$, & $C+D$ ad $E$, sunt proportionales logarithmi-
*constr.* cè. Sed $A+B$ ad $B$ est vt $C+D$ ad $E$: ergo $A$
15. *h.* $+B$ ad $B$, est vt $C+D$ ad $D$ logarithmicè. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Rationes $A$ ad $B$, & quantitates $a$ ad $b$, sunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad $b$, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Assumatur $e$ quantitas, ad quàm, $a+b$ est logarithmicè, sicut ratio $A+B$, ad rationem $B$.

*Demonstr.*

*constr.* Quoniam $A+B$ ad B, & $a+b$ ad $c$, sunt logarithmicè proportionales: ergo diuidendo $A$ ad $B$, & $a+b-c$ ad $c$, sunt logarithmicè, propor-
*hypoth.* tionales. Sed $A$ ad $B$, & $a$ ad $b$, sunt logari-
15. *h.* thmicè proportionales. Ergo $a$ ad $b$, & $a+b-c$ ad $c$, sunt proportionales. Ergo $b$, $c$, sunt quantitates æquales.

14. 5. Nam si $b$, maior esset, quàm $c$: esset $a$, maior, quàm $a+b-c$. Sed contra, esset $a+b$, maior, quàm $a+c$: & $a+b-c$, maior, quàm $a$: quod
14. 5. est contradictio. Rursum si $b$, minor esset, quàm

$c$: esset

$c$: esset $a$, minor, quàm $a+b-c$. sed contra, esset $a+b$, minor, quàm $a+c$: & $a+b-c$, minor quàm $a$: quod est contradictio.

7. 5. Ergo $b$, $c$, sunt æquales. Ergo $a+b$, ad $b$,
*constr.* est vt $a+b$ ad $c$: Sed ratio $A+B$ ad rationem
15. *h.* $B$, est logarithmicè, vt quantitas $a+b$ ad quantitatem $c$: Ergo etiam est logarithmicè, vt $a+b$ ad $b$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 23. *Prop.* 23.

SI quemadmodum tota ratio, ad totam, ita logarithmicè fuerit abscissa ratio, ad abscissam: erit & residua, ad residuam, sicut logarithmicè tota ad totam.

*Hypoth.*

Rationes $A+B$ ad $C+D$, & $A$ ad $C$, sunt proportionales logarithmicè.

Dico etiam $A+B$ ad $C+D$, & $B$ ad $D$, esse proportionales logarithmicè.

*Demonstr.*

*hypoth.* Rationes $A+B$ ad $C+D$, & $A$ ad $C$, sunt
20. *h.* proportionales logarithmicè: ergo permutando,
21. *h.* sunt proportionales logarithmicè $A+B$ ad $A$, & $C+D$ ad $C$: ergo diuidendo, $B$ ad $A$, &
20. *h.* $D$ ad $C$, sunt proportionales: ergo permutando $B$ ad $D$, & $A$ ad $C$, sunt proportionales: Sed $A$ ad $C$, & $A+B$ ad $C+D$ sunt proportio-

15. b. nales. Ergo $A+B$ ad $C+D$, & $B$ ad $D$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 24. Prop. 24.*

SI sint tres rationes, atque tres quantitates, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem prima ratio, quàm tertia, altior fuerit; erit & prima quantitas, quàm tertia, maior: quod si prima ratio, fuerit æquealta tertiæ; erit & prima quantitas, æqualis tertiæ: sin illa depressior; hęc quoque minor erit. Et è conuerso.

*Hypoth. commun.*

Tres rationes $A$, $B$, $C$, & tres quantitas $a$, $b$, $c$, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales: $A$ ad $B$, vt $a$ ad $b$; $B$ ad $C$, vt $b$ ad $c$.

*Hypoth. 1.*

Altior est ratio $A$, quàm $C$.

Dico, maiorem esse quantitatem $a$, quàm $c$.

*Demonstr.*

12. b. Ratio $B$ ad $C$, maior est logarithmicè, quàm
hypoth. $B$ ad $A$: sed $b$ ad $c$ est logarithmicè vt $B$ ad
def. 8. b. $C$: & $B$ ad $A$, est logarithmicè, vt $b$ ad $a$: er-
17. b. go $b$ ad $c$, maior est, quàm $b$ ad $a$. Ergo
10. 5. maior est $a$, quàm $c$. Quod &c.

*Hypoth. 2.*

Æquealtæ sunt rationes $A$, $C$.

Dico, æquales esse quantitates $a$, $c$.

De-

*Demonstr.*

11. *h. sup.* 9. 5. Ratio *B* ad *C*, est logarithmicè, vt *B* ad *A*. Ergo *b* ad *c*, est vt *b* ad *a*. Ergo æquales sunt *a*, *c*. Quod &c.

*Hypoth. 3.*

Depressior est ratio *A*, quàm *C*.

Dico, minorem esse quantitatem *a*, quàm *c*.

*Demonstr.*

*def. p. h. sup.* Altior est, *C*, quàm *A*: ergo maior est *c*, quàm *a*: Ergo minor est *a*, quàm *c*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si *a* quantitas, maior est quantitate *c*: etiam ratio *A*, ratione *C* est altior: si æqualis; æquealta: si minor; depressior. Quod. &c.

Quare &c.

---

*Theor. 25. Prop. 25.*

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem, prima quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta altior. Quod si prima tertiæ fuerit æquealta; er t & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

*Hypoth. commun.*

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ sunt logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *D* ad *E*; *B* ad *C*, vt *E* ad *F*.

*Hypoth.* 1.

Altior est ratio *A*, quàm *C*.

Dico altiorem esse *D*, quàm *F*.

*Demonst.*

12. *b.* | Maior est *B*, ad *C*, logarithmicè, quàm *B* ad
*hypoth.* | *A*. Sed *B* ad *C* est logarithmicè, vt *E* ad *F*: &
*def.* 12. *b* | *B* ad *A*, logarithmicè, vt *E* ad *D*. Ergo maior
17. *b.* | est *E* ad *F*, logarithmicè, quàm *E* ad *D*. Ergo
14. *b.* | altior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Æquealtæ sunt rationes *A*, *C*.

Dico, æquealtas esse rationes *D*, *F*.

*Demonstr.*

11. *b.* | Eadem est *B* ad *C*, logarithmicè, quæ *B*
*sup.* | ad *A*. Ergo eadem est *E* ad *F* logarithmicè quæ
13. *b.* | *E* ad *D*. Ergo æquealtæ sunt rationes *D*, *F*.
| Quod &c.

*Hypoth.* 3.

Depressior est *A*, quàm *C*.

Dico, depressiorem esse *D*, quàm *F*.

*Demonstr.*

*def p.b.* | Altior est enim *C*, quàm *A*: ergo altior est *F*,
*l sup.* | quàm *D*: ergo depressior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 26. *Prop.* 26.

SI sint tres quantitates, atque tres rationes, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur; fueritque per-

perturbata earum proportio: ex æquo autem prima quantitas, quàm tertia, maior fuerit; erit & prima ratio, quàm tertia, altior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis quantitas; erit & prima tertiæ, æquealta ratio: sin illa minor, hęc quoque depressior erit. Et è conuerso.

*Hyppth. commun.*

Tres quantitates *a*, *b*, *c*, atque tres rationes *A*, *B*, *C*, binę, & binæ, sunt logarithmicè, proportionales; & earum perturbata est proportio: quantitates enim *a* ad *b*, & rationes *B* ad *C*, sunt logarithmicè proportionales: necnon quantitates *b* ad *c*, & rationes *A* ad *B*, sunt logarithmicè proportionales.

*Hypoth.* 1.

Maior est *a*, quàm *c*.

Dico altiorem esse *A*, quàm *C*.

*Demonstr.*

8. 5. Maior est *b* ad *c* ratio, quàm *b* ad *a*; Sed
*hypoth.*
*def.* 8. *h.* *b* ad *c*, est logarithmicè, vt *A* ad *B*: & *b* ad
17. *h.* *a*, logarithmicè, vt *C* ad *B*. Ergo *A* ad *B*,
14. *h.* maior est logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo altior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Æquales sunt *a*, *c*.

Dico æquealtas esse *A*, *C*.

*Demonstr.*

7. 5. Eadem est *b* ad *c*, quæ *b* ad *a*. Ergo eadem
*sup.*
13. *h.* est logarithmicè *A* ad *B*, quæ *C* ad *B*. Ergo *A*, *C* sunt æquealtæ. Quod &c.

*Hy-*

*Hypoth.* 3.

Minor est *a*, quàm *c*.

Dico depressiorem esse *A*, quàm *C*.

*Demonstr.*

*sup.* | Maior est *c*, quàm *a*: Ergo altior est *C*, quàm
*def.2.h.* | *A*: ergo depressior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si ratio *A*, ratione *C*, est altior; etiam quantitas *a*, quantitate *c*, est maior: si æquealta; æqualis: si depressior; minor. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 27. *Prop* 27.

SI sint tres rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur; fueritque perturbata earum proportio logarithmica: ex ęquo autem prima, quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta, altior. Quòd si prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

*Hypoth. commun.*

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales; & earum perturbata est proportio: sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F*, logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E*, sunt proportionales logarithmicè.

Hy-

*Hypoth.* 1.

Altior est *A*, quàm *C*.

Dico altiorem esse *D*, quàm *F*.

*Demonstr.*

12. *b.* | Maior est logarithmicè, *B* ad *C*, quàm *B* ad
*hypoth.* | *A*: sed *B* ad *C*, est vt *D* ad *E*: & *B* ad *A* est,
*def.* 12. *b* | vt *F* ad *E*, logarithmicè: ergo *D* ad *E* maior
17. *b.* | est logarithmicè, quàm vt *F* ad *E*: Ergo *D* al-
14. *b.* | tior est, quàm *F*. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Æquealtæ sunt *A*, *C*.

Dico æquealtas esse *D*, *F*.

*Demonstr.*

11. *b.* | Eadem est *B* ad *C* logarithmicè, quæ *B* ad
*sup.* | *A*. Ergo eadem est *D* ad *E* logarithmicè, quæ
13. *b.* | *F* ad *E*. Ergo *D*, *F* sunt æquealtæ. Quod &c.

*Hypoth.* 3.

Depressior est *A*, quàm *C*.

Dico depressiorem esse *D*, quàm *F*.

*Demonstr.*

*def.* p. *b.* | Altior est *C*, quàm *A*: ergo altior est *F*, quàm
*sup.* | *D*: ergo depressior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 28. *Prop.* 28.

SI sint quotcunque rationes totidemque quantitates, quæ binæ, in eadem ratione logarithmica sumantur: &

& ex æqualitate in eadem erunt ratione logarithmica.

*Hypoth.*

Sint quotcunque rationes *A*, *B*, *C*, *D*, totidemque quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: binæ, & binæ logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *a* ad *b*; *B* ad *C*, vt *b* ad *c*; *C* ad *D*, vt *c* ad *d*.

Dico ex æqualitate, *A* ad *C*, & *a* ad *c*, esse logarithmicè proportionales.

Item *A* ad *D*, & *a* ad *d* esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur ęquemultiplicata, & multiplex, 3*A*, 3*a*: item rationis, & quantitatis, *B*, *b*, sumantur, 4*B*, 4*b*: & rationis, & quantitatis, *C*, *c*, sumantur, 2*C*, 2*c*.

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam *A* ad *B*, & *a* ad *b*, sunt logarithmicè proportionales: ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*a* ad 4*b*, sunt logarithmicè proportionales.
*6. h.* Item quoniam *B* ad *C*, & *b* ad *c*, sunt loga-
*hypoth.* rithmicè proportionales: ergo 4*B* ad 2*C*, &
*6. h.* 4*b* ad 2*c*, sunt logarithmicè proportionales. Er-
*24. h.* go ex æquali, si 3*A* est altior, quàm 2*C*; etiam 3*a* est maior, quàm 2*c*: si æquealta; æqualis: si
*def. 8. h.* depressior; minor. Ergo *A* ad *C*, & *a* ad *c* sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.
*hypoth.* Sunt autem *C* ad *D*, & *c* ad *d*, logarithmicè pro-

*sup.* | cè proportionales. Ergo *A* ad *D*, & *a* ad *d*, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 29. Propos. 29.*

SI sint quotcunque rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem logarithmica ratione sumantur: & ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

*Hypoth.*

Sint quotcunque rationes, & aliæ totidem, *A*, *B*, *C*, *D*, & *E*, *F*, *G*, *H*: quæ binæ, & in eadem ratione sumantur: videlicet, *A* ad *B*, & *E* ad *F*: item *B* ad *C*, & *F* ad *G*: necnon *C* ad *D*, & *G* ad *H*.

Dico ex æqualitate *A* ad *C*, & *E* ad *G*, esse logarithmicè, proportionales.

Item *A* ad *D*, & *E* ad *H*, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Rationum *A*, *E*, sumantur æquemultiplicatæ, 3*A*, 3*E*: item rationum *B*, *F*, æquemultiplicatæ 4*B*, 4*F*: & rationunm *C*, *G*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*G*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | Quoniam *A* ad *B*, & *E* ad *F*, sunt logarithmicè proportionales, etiam 3*A* ad 4*B*, &
*7. h.* | 3*E* ad 4*F*, sunt logarithmicè proportionales.
*hypoth.* | item quoniam *B* ad *C*, & *F* ad *G*, sunt logari-

7. *h.* garithmicè proportionales; etiam $4B$ ad $2C$, & $4F$ ad $2G$, sunt logarithmicè, proportio-
25. *h.* nales. Ergo si $3A$ altior est quàm $2C$; etiam $3E$ altior est, quàm $2G$: si æquealta; æquealta: si
*def.* 12. *h* depressior; depressior. Ergo $A$ ad $C$, & $E$ ad $G$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 30. *Prop.* 30.

SI sint tres quantitates, totidémque rationes, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur; fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æqualitate, in eadem erunt ratione logarithmica.

*Hypoth.*

Sint tres quantitates $a$, $b$, $c$, totidemque rationes $A$, $B$, $C$, binæ, & binæ logarithmicè proportionales, & earum sit perturbata proportio: nempe sint $a$ ad $b$, & $B$ ad $C$, logarithmicè proportionales: & $b$ ad $c$, & $A$ ad $B$, logarithmicè proportionales.

Dico, $a$ ad $c$, & $A$ ad $C$, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Sumantur ipsarum $a$, $b$, quantitatum æquemultiplices $3a$, $3b$, & rationis $A$, æquemultiplicata $3A$. ipsarum quoque rationum $B$, $C$, & quantitatis $c$, sumantur æquemultiplicatæ rationes $4B$, $4C$, & æquemultiplex quantitas $4c$.

De-

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam *b* ad *c*, & *A* ad *B*, sunt logarithmi-
*6. b.* cè proportionales: etiam *3b* ad *4c*, & *3A* ad
*15. 5.* *4B*, sunt logarithmicè proportionales: sunt au-
*hypoth.* tem *3a* ad *3b*, sicut *a* ad *b*: & *a* ad *b*, sicut lo-
*19. b.* garithmicè *B* ad *C*: & *B* ad *C* logarithmicè, si-
*17. b.* cut *4B* ad *4C*. Ergo *3a* ad *3b*, est vt *4B* ad *4C*.
Sed ostensum est, *3b* ad *4c*, esse logarithmicè, vt
*26. b.* *3A* ad *4B*. ergo ex æquali, si *3a* est maior, quàm
*4c*; etiam *3A* est altior, quàm *4C*: si æqualis;
*def.8.b.* æquealta: si minor; depressior. Ergo *a* ad *c*, est
logarithmicè, sicut *A* ad *C*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 31. *Prop.* 31.

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio logarithmica: etiam ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

*Hypoth.*

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ sunt in eadem ratione logarithmica, & earum est perturbata proportio logarithmica; sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F* logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E* sunt logarithmicè proportionales.

Dico, ex æquali, *A* ad *C*, & *D* ad *F*, esse logarithmicè proportionales.

*Præpar.*

Rationum $A$, $B$, $D$, sumantur æquemultiplicatæ $3A$, $3B$, $3D$: & rationum $C$, $E$, $F$, aliæ sumantur ęquemultiplicatæ $4C$, $4E$, $4F$.

*Demonstr.*

19. h. Rationes $3A$ ad $3B$, & $A$ ad $B$, sunt logarithmicè proportionales: rationes $A$ ad $B$, & $E$
hypoth. ad $F$, sunt logarithmicè proportionales: ratio-
19. h. nes $E$ ad $F$, & $4E$ ad $4F$, sunt logarithmicè
17. h. proportionales: ergo rationes $3A$ ad $3B$, & $4E$
hypoth. ad $4F$, sunt logarithmicè proportionales. Et quoniã $B$ ad $C$, & $D$ ad $E$ rationes, logarithmicè
7. b. sunt proportionales: etiam $3B$ ad $4C$, & $3D$ ad $4E$ rationes, logaritmicè sunt proportiona-
27. h. les. Ergo ex æquali, si $3A$ est altior, quàm $4C$; etiam $3D$ est altior, quàm $4F$: si ęquealta; ęque-
def. 12. h alta: si depressior; depressior. Ergo $A$ ad $C$, & $D$ ad $F$ rationes, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quaie &c.

---

*Theor. 32. Prop. 32.*

SI prima ratio ad secundam, logarithmicè fuerit, sicut prima quantitas ad secundam; tertia quoque ratio ad secundam, logarithmicè fuerit, sicut tertia quantitas ad secundam: etiam composita ex prima, & tertia ratione, ad secundam, erit logarithmicè, sicut aggregata quantitas

ex

ex prima, & tertia, ad secundam.

*Hypoth.*

Sint *A*, *B*, *C* rationes, & *a*, *b*, *c*, quantitates: & sit *A* ad *B* logarithmicè, sicut *a* ad *b*: item *C* ad *B* logarithmicè, sicut *c* ad *b*.

Dico *A*+*C* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a*+*c* ad *b*.

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam *C* ad *B*, est logarithmicè, sicut *c* ad
*def.8.b.* *b*: conuertẽdo, *B* ad *C*, est logarithmicè, sicut *b*
*hypoth.* ad *c*: Sed *A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*:
*28. b.* ergo ex ęquali *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut *a* ad
*22. b.* *c*: ergo componendo *A*+*C* ad *C*, est logarithmi-
*hypoth.* cè, sicut *a*+*c* ad *c*. Sed *C* ad *B* est logarithmicè,
*28. b.* sicut *c* ad *b*: ergo ex æquali *A*+*C* ad *B* est logarithmicè sicut *a*+*c* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 33. *Prop.* 33.

SI prima ratio ad secundam, eadem logarithmicè fuerit, quæ tertia ad quartam; fuerit autem, & quinta ad secundam, eadem logarithmicè, quæ sexta ad quartam: erit & composita prima cum quinta ad secundam, eadem quæ composita tertia cum sexta ad quartam.

*Hypoth.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt proportionales: item *E* ad *B*, & *F* ad *D*, sunt proportionales.

Dico *A*+*E* ad *B*, & *C*+*F* ad *D*, esse proportionales.

De-

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam $E$ ad $B$, & $F$ ad $D$, sunt logarithmicè proportionales: conuertendo $B$ ad $E$,
*def. 12. h.* & $D$ ad $F$, sunt logarithmicè proportionales:
*hypoth.* sed $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, sunt logarithmicè
*29. h.* proportionales: Ergo ex æquali $A$ ad $E$, & $C$
*22. h.* ad $F$; sunt logarithmicè proportionales: ergo componendo $A+E$ ad $E$, & $C+F$ ad $F$, sunt
*hypoth.* logarithmicè proportionales. Sed $E$ ad $B$, &
*29. h.* $F$ ad $D$, sunt logarithmicè proportionales. Ergo $A+E$ ad $B$, & $C+F$ ad $D$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 34. Prop. 34.*

SI rationes quatuor fuerint logarithmicè proportionales: composita ex duabus, altiore omnium, & depressiore omnium, altior est, quàm composita ex reliquis duabus.

*Hypoth.*

Sint rationes $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$ logarithmicè proportionales: Et esto $A$ altior, quàm $B$, necnon altior quàm $C$. Et quoniam $A$ altior est, quàm $C$: ergo $B$ altior est, quàm $D$. Ergo $A$ altior est omnium; & $D$ depressior omnium.

Dico rationem $A+D$, altiorem esse ratione $B+C$.

*Præ-*

*Præpar.*

Quoniam *A* altior est, quàm *B*: sumatur *E* ratio, quacum composita *B*, facit rationem *A*: vt ita ratio *A*, sit eadem, quę *B+E*. Item quoniam *C* altior est, quàm *D*: sumatur *F* ratio, quacum composita *D*, facit rationem *C*: vt ita ratio *C*, sit eadem, quæ *D+F*.

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: *constr.* & est *A*, eadem, quæ *B+E*: & *C*, eadē, quæ *D+F*. ergo *B+E* ad *B*, *11. h.* & *D+F* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: ergo diuidendo, *E* ad *B*, & *F* ad *D*, sunt *21. h.* logarithmicè proportionales. Sed *B* altior est, *hypoth.* quàm *D*: ergo *E* altior est, quàm *F*: compositisque communiter *B*, & *D* rationibus; ergo *18. h.* *4. 3.* *B+E+D* ratio, altior est, quàm *B+D+F*. Sed *constr.* *B+E*, ratio eadem est, quæ *A*: & *D+F*, eadem quæ *C*: ergo *A+D* altior est, quàm *B+C*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 35. Prop. 35.*

RAtiones proportionales, per conuersionem rationis, sunt proportionales.

*Hypoth.*

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt logarithmicè proportionales: & est *A* altior, quàm *B*: ideoque etiam *C*, altior

altior est, quàm *D*.

Dico *A* ad *A*--*B*, esse logarithmicè, sicut *C* ad *C*--*D*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *A*; *B*: *C*; *D*. |
| 21. *b.* | *A*—*B*; *B*: *C*—*D*; *D*. |
| *def.12.b* | *B*; *A*; *D*; *C*. |
| 29. *b.* | *A*—*B*; *A*: *C*—*D*; *C*. |
| *def.12.b* | *A*; *A*—*B*: *C*; *C*—*D*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 36. Prop. 36.*

RAtiones logarithmicè proportionales, per homologiam sunt logarithmicè proportionales.

*Demonstr.*

*def.12.b* Nam conuertendo, rationes fiunt proportio-
23. *b.* nales: item homologas depressiores ab homologis
22. *b.* altioribus decomponendo: & adcomponendo; &
35. *b.* per conuersionem rationis: & diuidendo: & ęque-
21. *b.* multiplicando, & æquesubmultiplicando: & per-
19. *b.* mutando: & colligendo: & ex æquali in propor-
20. *b.* tione logarithmica ordinata: coniunctisque omni-
16. *b.* fariam argumentis huiusmodi, quocunque ordi-
28. *b.* ne, per homologiam, logarithmicè proportiona-
les fiunt. Quod &c.

Quare &c.

---

Petrus

Petrus Mengolus, Io. Galeatio Manzio, iuueni ſtudioſiſſimo. S.D.



*Vintum hoc elementum, de nouis, & naturalibus logarithmis, cuiuſque rationis inſeparabiliter proprijs, quocum communicarem, neminem in mea, aut cuiuſquam alterius Mathematici ſchola, ſatis noui diſpoſitum, prater te, omnium bonarum artium, & in primis Mathematicarum ſtudioſiſsimum. Et hæc profectò inſignis fælicitas, incomparabili virtuti acceſsit, & meritis Excellentiſsimi præceptoris tui Caſsini: quòd te, tùm frequentem in Muſæo auditorem, tùm in ſuis Aſtronomicis, & Aquaticis laboribus, comitem indiuiduùm, & ſolertem nactus fuerit adiutorem. Itaque cum tuam mihi conſuetudinem, rariùs hoc anno, quàm ante conſueueras, offerres; mandaui, meum tui deſiderium, tibi ſignificari: vt meorum etiam ſtudiorum particeps fieres, & conſultor. Gratiam liberaliter feciſti, quàm volebam: meque domi aliquoties conueniſti, huiu-*

*ſce opuſculi partem hanc ſcriptitantem. Et ex me, tùm definitiones præcedentium elementorum, & rationes nominum, & propriam cuiuſque vtilitatem elementi, necnon quaſdam nobiliores demonſtrationes audiſti ſparſim; tùm vel maximè numeroſam methodum: qua hyperlogarithmorum, & hypologarithmorum, & logarithmorum rationes mihi contigit inuenire. tuque inuenti ſubtilitatem laudaſti, quòd mihi Deus liberaliter tribuit: atque vtilitatem trigonometricam, ad faciliorem logarithmici canonis conſtructionem, optimè præuidiſti. Ex laude tua, plurimum profeciſſe me fateor: nam alacrior factus, & ex tecum communicatione vegetior, multarum concluſionum, quas prænoui euidentiſsimis arithmeticis artificijs, quæ mihi ſupererant demonſtrandæ, media lemmata reperire cæpi, longè fæliciùs. Libellum igitur hucuſque non ſine tuo adminiculo perfectum, offero: vt ſermones indemonſtratos, quos inuicem habebamus, per te ipſum legendo poſsis complere. Vale. meque, & labores meos, inprimis Excellentiſsimo Caſsino, deinde alijs tuis conſcholaribus, & amicis, vt commendes, rogo.*

GEO-

# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

## ELEMENTVM QVINTVM.

### DEFINITIONES.

1 Differentia duarum quantitatum, quando prima superat secundam, dicetur, Excessus primæ & secundæ.

2 Quando verò prima superatur à secunda, dicetur, Defectus primæ, & secundæ.

3. Similes differentiæ dicentur, excessus excessibus, & defectus defectibus.

4. Dissimiles verò, excessus defectibus.

5. Quatuor quantitates, dicentur, Arithmeticè dispositæ; cum primæ & secundæ, tertiæ & quartæ, fuerint similes, & æquales differentiæ.

6. Inuersio Arithmetica, dicetur; cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur arithmeticè, secunda & prima, quarta & tertia.

 7. Per-

7. Permutatio Arithmetica, dicetur: cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponenter arithmeticè, prima & tertia, secunda & quarta.

8. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem, & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ arithmeticè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, arithmeticè dispositæ; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ arithmeticè, atque secundę.

9. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint arithmeticè dispositæ; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate arithmetica.

10. Tres quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatę; cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, similes, & ęquales fuerint differentiæ.

11. Plures quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatæ; cum ternæ deinceps fuerint arithmeticè ordinatę: idest, cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, tertiæ & quartæ, & deinceps vsque ad vltimam, similes, & æquales fuerint differentiæ.

12. Series naturalis arithmetica, dicetur; cuius ordinatarum arithmeticè quantitatum prima, dimidia est secundæ.

13. Quatuor quantitates, dicentur, Harmonicè dispositæ, cum differentia primæ & secundæ, ad similem differen-

rentiam tertiæ & quartæ, rationem compositam habuerit ex rationibus, primæ ad tertiam, & secundæ ad quartam.

14. Inuersio Harmonica, dicetur; cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, secunda & prima, quarta & tertia.

15. Permutatio Harmonica, dicetur, cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, prima & tertia, secunda & quarta.

16. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem; & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ harmonicè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, dispositę harmonicè; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ harmonicè, atque secundæ.

17. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint harmonicè dispositę; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate harmonica.

18. Tres quantitates, dicentur, harmonicè ordinatę; cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit sicut prima, quantitas ad tertiam.

19. Plures quantitates dicentur harmonicè ordinatæ, cum ternæ deinceps fuerint harmonicè ordinatæ: idest cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit vt prima ad tertiam; differentia

quo-

quoque secundæ & tertiæ, ad similem differentiam tertiæ & quartæ, fuerit sicut secunda ad quartam; & sic deinceps vsque ad vltimam.

20. Series naturalis harmonica, dicetur, cuius ordinatarum harmonicè quantitatum prima, dupla est secundę.

21. Si à rationali, series harmonica naturalis fuerit ordinata; & à quotoquouis ordinatorum terminorum quotcunque fuerint deinceps assumpti, & aggregati: summa, dicetur, Prologarithmus.

22. Porrò prologarithmus, dicetur Hyperlogarithmus earum rationum, quas habent inuicem, primus assumptus terminus, & proximus vlterior vltimo, non assumptus.

23. Et earum rationum Hypologarithmus, dicetur, quas habent inuicem, vltimus assumptus terminus, & proximus prior primo, non assumptus.

24. Quantitas omni minor hyperlogarithmo earumdem rationum, & omni maior hypologarithmo, earumdem Logarithmus, dicetur.

25. Ex totenis deinceps Prologarithmorum series, dicetur: in qua, ex prioribus, dicetur, Primus; ex totidem immediatè sequentibus, Secundus; ex alijs deinceps totidem, Tertius Prologarithmus; & sic deinceps reliqui. Vt prologarithmorum, ex ternis à secundo, dicetur, Primus, qui ex secundo, tertio, & quarto fit collectis; Secundus, qui ex quinto, sexto, & septimo; Tertius, qui ex octauo, nono, & decimo; & ita deinceps.

26. Si

26. Si duo prologarithmi, ex inæqualibus multitudine terminis collecti fuerint; & cuius maior est multitudo terminorum, eius termini singuli, per alteram multitudinem fuerint æqualiter diuisi: siquidem factæ partes ordinatim sumptæ maiorum primùm terminorum, deinde minorum, & collectæ totenæ, quota est sua maior multitudo terminorum, maiores fuerint singulis terminis alterius prologarithmi: maior profectò prologarithmus erit, ex maioribus partibus; & dicetur, Perspectè maior.

27. Si verò factæ partes totenæ, minores fuerint singulis: erit profectò minor prologarithmus, ex minoribus partibus; & dicetur Perspectè minor.

28. Si quatuor proportionalium, rationalis fuerit prima: quarta, dicetur, Productus secundæ & tertiæ. Et significabitur charactere, ex vtrisque secundæ, ac tertiæ characteribus deinceps conscriptis composito. vtpote ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus ad tertiam, & ad secundam. Exempli gratiam. *u* ad *a*, est vt *b* ad *ab*. Item. *u* ad *ab*, est vt *c* ad *abc*.

29. Si verò quatuor proportionalium, rationalis fuerit secunda: quarta, dicetur, Fractio. & significabitur charactere tertiæ, ante characterem primæ scripto, & patrentheses clauso. Exempli gratia *a* ad *u* est vt *b* ad *b* (*a*). Item. *ab* ad *u* est vt *c* ad *c* (*ab*). Et *c* ad *u*, est vt *ab* ad *ab* (*c*).

30. Tertia autem, dicetur; Numerator fractionis: cuius character, scribetur supra lineolam, vt in charactere fra-

fractionis, $b$ ($a$), numerator eſt $b$.

31. Et prima, dicetur, Denominator fractionis: cuius character, ſcribetur infra lineolam. vt in charactere fractionis $b$ ($a$), denominator eſt $a$.

32. Numeroſa ratio dicetur, cui eandem habet numerus ad numerum.

33. Non numeroſa ratio dicetur, cui nulla numeroſa eſt eadem.

34. Non numeroſæ rationis logarithmus, dicetur, quantitas, minor omni logarithmo altioris numeroſæ rationis, & maior omni logarithmo depreſſioris.



Theor-

*Theorema prima Propositio prima.*

SI trium inæqualium quantitatum, minima, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremarum: ipſa differentia extremarum, minor eſt, ad rationalem, quàm vt minima, ad defectum minimæ, & mediæ.

*Hypoth.*

Sunto tres inæquales quantitates $a$, $a+b$, $a+b+c$: & eſto $a$, non minor, quàm $b2+2bc+c2$.

Dico $b+c$; $u$: minorem eſſe, quàm $a$; $b$.

*Demonſt.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $b2+2bc+c2$ : non maior, quàm $a$. |
| 8.5. | $b2+2bc+c2$; $b+c$: non maior, quàm $a$; $b+c$. |
| 8.p. | $b2+2bc+c2$; $b+c$: $b+c$; $u$. |
| 13.5. | $b+c$; $u$: non maior, quàm $a$; $b+c$. |
| 8.5. | $a$; $b+c$: minor, quàm $a$; $b$. |
| 13.5. | $b+c$; $u$: minor, quàm $a$; $b$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 2. Prop. 2.*

CVm trium inæqualium numerorum, minimus, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremorum; ſi defectus medij & maximi denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij auctus vnitate denominetur à maximo: fiunt duæ Fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

*Hypoth.*

Sunto tres inæquales numeri $a$, $a+b$, $a+b+c$: & esto $a$, non minor, quàm $b2+2bc+c2$.

Dico $c$ $(a)$, $+b+u$ $(a+b+c)$: minorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| p. h. | $b+c$; $u$: minor est, quàm $a$; $b$. |
| p. 3. | $b+c+u$; $u$: minor, quàm $a+b$; $b$. |
| 3. 3. | $b+c+u$; $b+c$: maior, quàm $a+b$; $a$. |

Itaque *per* 19.7. productus $b+c$, per $a+b$: minor est quàm productus $b+c+u$, per $a$.

Additoque communi producto $a$, per $a+b$. productus $b+c+a$, per $a+b$: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per $a$; & $a+b$, per $a$.

Et communiter multiplicando per $c$. productus $b+c+a$, per $a+b$, per $c$: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per $a$, per $c$; & $a+b$, per $a$, per $c$.

Additoque communi producto $a$, per $b+u$, per $a+b$. summa productorum $b+c+a$, per $a+b$, per $c$; & $a$, per $b+u$, per $a+b$: minor, quàm productus $a$, per $a+b+c$, per $b+c+u$.

Et communiter diuidendo, per $a$, per $a+b+c$, per $a+b$. $c$ $(a)$, $+b+u$ $(a+b+c)$: minor, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

---

Theo-

*Theor.* 3. *Prop.* 3.

SI trium inæqualium numerorum, defectus medij & maximi, auctus vnitate, denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij denominetur à maximo: fiunt duæ fractiones; quarum summa est maior, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

*Hypoth.*

Sunto tres inæquales numeri, $a$, $a+b$, $a+b+c$.

Dico $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maiorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

*Demonstr.*

Productus $c+u$, per $a+b+c$, per $b$: maior est producto $a$, per $c$, per $b$.

Additoque communi producto $a$, per $b$, per $a+b$. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per $b$; & $a$, per $b$, per $a+b$: maior est, quàm productus $a$, per $b$, per $a+b+c$.

Additoque communi producto $c+u$, per $a+b+c$, per $a$. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per $a+b$; & $a$, per $b$, per $a+b$: maior est quàm productus $a$, per $b+c+u$, per $a+b+c$.

Et communiter diuidendo, per $a$, per $a+b+c$, per $a+b$. $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maior est, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 4. *Prop.* 4.

QVatuor termini arithmeticè diſpoſiti, permutando, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

*Hypoth.*

Quatuor termini $a$, $a+b$, $c$, $c+b$, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Dico permutando $a$, $c$, $a+b$, $c+b$ eſſe arithmeticè diſpoſitos.

*Demonſtr.*

Siquidem $a$, maior eſt, quàm $c$; tantumdem
def. 5. b. $a+b$, maior eſt, quàm $c+b$: ſi minor, minor. Ergo $a$, $c$, $a+b$, $c+b$, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor.* 5. *Prop.* 5.

SI fuerint aliquot quantitates, in vna ſerie, ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque totidem, in altera: erunt ex æqualitate arithmetica, prima & vltima, in vna ſerie, item prima & vltima, in altera, diſpoſitæ arithmeticè.

*Hypoth.*

Sint $a$, $b$, $c$, ſimiliter diſpoſitæ arithmeticè, atque aliæ totidem $d$, $e$, $f$.

Dico ex ęqualitate arithmetica, eſſe diſpoſitas arithmeticè, $a$, $c$, & $d$, $f$.

*Demonſtr.*

def. 8. b. Sunt enim $a$, $b$, $d$, $e$, arithmeticè diſpoſitę:
4. b. ergo permutando $a$, $d$, $b$, $e$, ſunt arithmeticè
def. 5. b. diſpoſitę: ergo differentia $a$, $d$, differentię $b$, $e$,

ſimilis

similis est, & æqualis. Similiter ostendetur differentia *b, e*, differentiæ *c, f*, similis, & æqualis: ergo differentia *a, d*, differentiæ, *c, f*, similis
def.5.b. est, & æqualis: ergo *a, d, c, f*, sunt arithmeticè
4. b. cè dispositæ: ergo permutando, *a, c, d, f*, sunt arithmeticè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 6. Prop. 6.*

ARithmeticè dispositarum ęquemultiplices, sunt arithmeticè dispositæ.

*Hypoth.*

Sint arithmeticè dispositæ *a*, $a+b$, *c*, $c+b$. quorum æquemultiplices $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3d$.

Dico $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, esse dispositas arithmeticè.

*Demonstr.*

19. 5. Differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam *a*, $a+b$, æquemultiplex est, atque $3a$ ad *a*: sed $3a$
19. 5. ad *a*, æquemultiplex est, atque $3c$ ad *c*: & $3c$ ad *c*, æquemultiplex: atque $3c+3b$ ad $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam *a*, $a+b$, æquemultiplex est, atque differentia $3c$, $3c$
def.5.b. $+3b$ ad differentiam *c*, $c+b$. Sed differentia *a*, $a+b$, æqualis est differentiæ *c*, $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, æqualis est differentiæ $3c$, $3c$ $+3b$.

Rur-

17. 7. Rurſum differentia $3a$, $3a+3b$, ſimilis eſt differentiæ $a$, $a+b$: & differentia $a$, $a+b$ ſimilis differentiæ $c$, $c+b$: & differentia $c$, $c+b$ ſimilis differentiæ $3c$, $3c+3b$: Ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ſimilis eſt, & æqualis differentię $3c$; $3c+3b$: Ergo $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. Quod &c.

def. 5. h.

17. 7.

def. 5. h.

Quare &c.

---

*Theor. 7. Prop. 7.*

IN ſerie arithmetica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum multiplicati; ſicut primi producti, ſimiliter ſecundi, ſunt arithmeticè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

*Hypoth.*

$a$, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$, $a+5$.
$b$, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$,

Sint in ſerie arithmetica naturali duo termini, $a$, $b$: & ſint ab $a$, terni; & ternorum primi $a$, $a+1$, $a+2$; ſecundi $a+3$, $a+4$, $a+5$: & à $b$, ſint quaterni; & quaternorum primi $b$, $b+1$, $b+2$, $b+3$; ſecundi, $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.

Quoniam in ſerie arithmetica naturali proximorum differentiæ, ſunt vnitates: ergo alternorum, ſunt binarij; tertiorum, ternarij; quartorum, quaternarij; & ſic deinceps.

ceps. Sunt autem primus primorum ex ternis, & primus secundorum, ab inuicem tertij: & primus primorum ex quaternis, & primus secundorum, ab inuicem quarti: ergo differentia $a$, $a+3$, est ternarius 3; & differentia $b$, $b+4$, & quaternarius 4. Multiplicentur itaque terni, per 4: & quaterni, per 3: & fiant multiplices terni, & quaterni primi; item terni, & quaterni secundi.

Dico multiplices primorum $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, esse similiter arithmeticè dispositos, atque secundorum, $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

*Demonstr.*

*hypoth.* Termini $a+2$, $a+1$, $a$, sunt deinceps in serie arithmetica naturali, in qua sunt etiam termini $a+5$, $a+4$, $a+3$. Ergo $a+2$, $a+1$,

*def. 6. h.* $a$; sunt similiter arithmeticè ordinati, atque $a+5$,

*6. h.* $a+4$, $a+3$: & eorum æquemultiplices $4a+8$, $4a+4$, $4a$, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$.

*sup.* Defectus simplicium $a$, $a+3$, est ternarius:

*5. 5.* ergo earumdem quadruplicium defectus $4a$, $4a+12$, est productus 3, per 4. Item defectus simplicium $b$, $b+4$, est quaternarius: ergo earumdem triplicium defectus $3b$, $3b+12$, est

*14. 7.* productus 4 per 3. Sed productus 3 per 4, est æqualis producto per 3. ergo defectus $4a$,

*def. 5. h.* $4a+12$, æqualis est defectui $3b$, $3b+12$. Ergo $4a$, $4a+12$, $3b$, $3b+12$, sunt arithmeticè

$a$, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$, $a+5$.
$b$, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

4. *b.* cè diſpoſiti. Ergo permutando $4a$, $3b$, $4a+12$,
5. *b.* $3b+12$, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Ergo ex ęqua-
*def.8.b.* litate arithmetica, $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$.

Oſtendetur autem ſimiliter vt ſupra, quod $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$,
5. *b.* $3b+21$. Ergo ex ęqualitate arithmetica $4a+8$,
*def.8.b.* $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$. Quod &c.

Quare primi terni ab $a$, & quaterni à $b$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque ſecundi. Et eadem demonſtratione oſtendemus, tum ſecundos, tum primos, eſſe ſimiliter arithmeticè diſpoſitos, atque tertios, & atque quartos, & ſic deinceps.

---

*Theor.* 8. *Prop.* 8.

PRoducti, compoſitam habent rationem producentium.

*Hy-*

*Hypoth.*

Esto quantitatum $a$, $b$, productus $ab$; & quantitatum $c$, $d$, productus $cd$.

Dico $ab;\ cd:\ a;\ c,\!+b;\ d$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| def 28b | $ab;\ u:\ a;\ u,\!+b;\ u$. |
| def. 28b | $u;\ cd:\ u;\ c,\!+u;\ d$. |
| p. p. | $ab;\ cd:\ a;\ c,\!+b;\ d$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 9. Prop. 9.*

PRoducti communem habentes producentem, sunt vt producentes non communes.

*Hypoth.*

Esto quantitatum $a$, $b$, productus $ab$; & quantitatum $a$, $c$, productus $ac$.

Dico $ab;\ ac:\ b;\ c$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 8. h. | $ab;\ ac:\ b;\ a,\!+a;\ c$. |
| def. 5. 6. | $b;\ a,\!+a;\ c:\ b;\ c$. |
| p. p. | $ab;\ ac:\ b;\ c$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 10. Propos. 10.*

FRactiones eumdem habentes denominatorem, sunt inter se, vt numeratores.

*Hypoth.*

Fractionum communis denominator esto *a*: sunto numeratores *b*, *c*.

Dico *b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| def.29b | *a*; *u*: *b*; *b* (*a*). |
| def.29b | *a*; *u*: *c*; *c* (*a*), |
| 11. 5. | *b*; *b* (*a*): *c*; *c* (*a*). |
| 2. p. | *b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 11. *Prop.* 11.

QVatuor proportionalium quarta est fractio, in qua numerator est productus secundæ & tertiæ, denominator est prima.

*Hypoth.*

Sunto proportionales prima *a*, secunda *b*, tertia *c*.

Dico *a*; *b*: *c*; *cb* (*a*).

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| def.29b | *a*; *u*: *c*; *c* (*a*). |
| def.28b | *u*; *b*: *c*; *cb* |
| 10. b. | *c*; *cb*: *c* (*a*); *cb* (*a*). |
| 11. 5. | *u*; *b*: *c* (*a*); *cb* (*a*). |
| p. p. | *a*; *b*: *c*; *cb* (*a*). Quod &c. Quare &c. |

---

*Theor.* 12. *Prop.* 12.

FRactiones, quarum numeratores æquales, reciprocè sunt, vt denominatores. *Hy-*

*Hypoth.*

Esto fractionum numerator communis *a*: & sunto denominatores *b*, *c*.

Dico *b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*).

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *def.29h* | *b*; *u*: *a*; *a* (*b*). |
| *def.29h* | *c*; *u*: *a*; *a* (*c*). |
| *def.6.5.* | *u*; *c*: *a* (*c*); *a*. |
| *p. p.* | *b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*). Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 13. Prop. 13.*

DVorum productorum, quorum producentes partim communes, partim sunt non communes, primo alterum denominante, fit eadem fractio; quæ, non communium producentium, primo alterum denominante.

*Hypoth.*

Sunto producti *a b c*, *d b c*: quorum communis producens, *b c*; non communes, *a*, *d*. Et denominante *a b c*, numeratorem *d b c*; necnon denominante *a*, numeratorem *b*, fiant fractiones *d b c* (*a b c*), *d* (*a*).

Dico *d b c* (*a b c*): *d* (*a*).

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *def.29h* | *a b c*; *u*: *d b c*; *d b c* (*a b c*). |
| *2. p.* | *a b c*; *d b c*: *u*; *d b c* (*a b c*). |
| *9. h.* | *a*; *d*: *a b c*; *d b c*. |
| *11. 5.* | *a*; *d*: *u*; *d b c* (*a b c*). |

2. p. | $a$; $u$: $d$; $dbc$ $(abc)$.
def.29b | $a$; $u$: $d$; $d$ $(a)$.
9. 5. | $dbc$ $(abc)$: $d$ $(a)$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 13. *Prop.* 13.

FRactiones, quarum numeratores æquales,& denominatores arithmeticè dispositi, sunt harmonicè dispositæ.

*Hypoth.*

Esto quatuor fractionum numerator communis $a$, & sunto denominatores arithmeticè dispositi $b$, $c$, $d$, $e$.

Dico $a$ $(b)$, $a$ $(c)$, $a$ $(d)$, $a$ $(e)$ esse harmonicè dispositas.

*Demonstr.*

12. h. | Si differentia $b$, $c$, est defectus: ergo reciprocè differentia $a$ $(b)$, $a$ $(c)$, est excessus: & est differentia $d$, $e$, defectus: & reciprocè differentia $a$ $(d)$, $a$ $(e)$ est excessus. Quod si differentia $b$, $c$, est excessus: etiam differentia $d$, $e$, est excessus: & differentia $a$ $(b)$, $a$ $(c)$, reciprocè est defectus: necnon differentia $a$ $(d)$, $a$ $(e)$, est defectus. Quare factionum $a$ $(b)$, $a$ $(c)$, & $a$ $(d)$, $a$ $(e)$, similes sunt differentiæ. Esto differentia $b$, $c$, defectus. Ergo differentia $a$ $(b)$, $a$ $(c)$ est excessus: item differentia $a$ $(d)$, $a$ $(e)$.

hypoth. | $c$---$b$: $c$---$d$.

pro-

producendo per $ade$, & $abc$.

9. b. $aede - abde; abce - abcd: ade; abc: de; bc$.

denominando communiter per $bcde$.

13. b. $a\ (b) - a\ (c); a\ (d) - a\ (e): de; bc$.

8. b. $de; bc: d; b, + e; c$.

12. b. $d; b: a\ (b); a\ (d)$.

12. b. $e; c: a\ (c); a\ (e)$.

p. p. $de; bc: a\ (b); a\ (d), + a\ (c); a\ (e)$.

11. 5. $a\ (b) - a\ (c); a\ (d) - a\ (e): a\ (b); a\ (d), + a\ (c); a\ (e)$.

def. 13. b $a\ (b), a\ (c), a\ (d), a\ (e)$ sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Similiter ostendetur, si differentia $b, c$, est excessus.

Quare &c.

---

*Theor. 15. Prop. 15.*

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores, arithmeticè ordinati, sunt harmonicæ ordinatæ.

*Hypoth.*

Esto fractionum numerator communis $a$: & sunto denominatores arithmeticè ordinati, $b, c, d, e$.

Dico $a\ (b), a\ (c), a\ (d), a\ (e)$ esse harmonicè ordinatas.

*Demonstr.*

hypoth. $b, c, d$, sunt arithmeticè ordinati.

$b, c,$

def.5.h. | *b*, *c*, *c*, *d*, sunt arithmeticè dispositi.

14. h. | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*c*), *a* (*d*), sunt harmonicè dispositæ.

Differentia *a* (*b*), *a* (*c*), ad similem differentiam *a* (*c*), *a* (*d*), rationem habet compositam ex rationibus, *a* (*b*) ad *a* (*c*), & *a* (*c*) ad *a* (*d*): ideſt camdem, quàm habet *a* (*b*) ad *a* (*d*).

def.13 b | def.5.6.

def.18b | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), sunt harmonicè ordinatæ.

sup. | *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*), sunt harmonicè ordinatę.

def.19b | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*), sunt harmonicè ordinatæ. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 16. Prop. 16.*

SI aliquot fractiones, aliæque totidem, communem habentes numeratorem, denominatores habuerint similiter arithmeticè dispositos, erunt & ipsæ similiter harmonicè dispositæ.

*Hypoth.*

Sunto tres fractiones, aliæque tres, quarum communis numerator *a*: sint autem denominatores *b*, *c*, *d*, similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores *e*, *f*, *g*.

Dico *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), similiter harmonicè dispositas esse, atque *a* (*e*), *a* (*f*), *a* (*g*).

*Demonstr.*

hypoth. | *b*, *c*, *d*, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque *e*, *f*, *g*. *b*, *c*, *e*,

def.8.b. | $b$, $c$, $e$, $f$, sunt arithmeticè dispositi.
| $c$, $d$, $f$, $g$, sunt arithmeticè dispositi.
14.h. | $a\ (b)$, $a\ (c)$, $a\ (e)$, $a\ (f)$, sunt harmonicè dispositæ.
| $a\ (c)$, $a\ (d)$, $a\ (f)$, $a\ (g)$, sunt harmonicè dispositæ.
def.16 h | $a\ (b)$, $a\ (c)$, $a\ (d)$, sunt similiter harmonicè dispositæ, atque $a\ (e)$, $a\ (f)$, $a\ (g)$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 17. *Prop.* 17.

IN serie arithmetica, non maior, quàm dimidius termini proximi, non est medius.

*Hypoth.*

Sunto in serie arithmetica, tres termini $a$, $b$, $c$.
Dico $b$, maiorem esse, quàm dimidium, ad $c$.

*Demonstr.*

| Esto $b$, non maior, quàm dimidius ad $c$, si potest: eritque $b$, ęqualis, vel minor, quàm dimi-
def. 10. | dius ad $c$: eritque differentia $b$, $c$, defectus: cuius similis differentia $a$, $b$, erit defectus.
hypoth. | $b$; $c$: non maior, quàm dimidius.
19. 7. | $2b$: non maior, quàm $c$.
| $b$: non maior, quàm $c-b$.
def.10.b. | $c-b$: $b-a$.
| $b$: non maior, quàm $b-a$.
| $b+a$: non maior, quàm $b$. quod est absurdum.

$b$ non

| $b$ non est dimidius ad $c$. Quod &c.

Quare &c.

---

Theor. 18. Prop. 18.

IN serie harmonica, terminus non minor, quàm duplus termini proximi, non est medius.

*Hypoth.*

Sunto in serie harmonica tres termini $a$, $b$, $c$.

Dico $b$, minorem esse, quàm duplum, ad $c$.

*Demonstr.*

| Esto $b$, non minor, quàm duplus ad $c$, si potest. eritque differentia $b$, $c$, excessus: item differentia $a$, $b$, erit excessus.

def.18.b | $a - b$; $b - c$: $a$; $c$.

hypoth. | $b$; $c$: non minor, quàm duplus.

19. 7. | $b$: non minor, quàm $2c$.

| $b - c$: non minor, quàm $c$.

14. 5. | $a - b$: non minor, quàm $a$. Quod est absurdum.

| $b$, minor est, quàm duplus ad $c$. Quod &c.

Quare &c.

---

Theor. 19. Prop. 19.

QVælibet quantitas, & omnes eius multiplices ordinatæ, sunt in serie arithmetica naturali.

*Hypoth.*

Esto quantitas $u$, cuius multiplices ordinatæ $2u$, $3u$, $4u$, & c.

Dico

Dico *u*, 2*u*, 3*u*, 4*u*, &c. esse in serie arithmetica naturali.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| | Omnes differentiæ *u*, 2*u*, & 2*u*, 3*u*, & 3*u*, |
| *hypoth.* | 4*u*, & reliquæ, sunt similes, & æquales ipsi ratio- |
| *def.12.b* | nali *u*: & est *u* ad 2*u* dimidia. Ergo *u*, 2*u*, 3*u*, |
| | 4*u*, & c. sunt in serie arithmetica naturali. |
| | Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 20. Prop. 20.*

QVælibet quantitas, & omnes eius submultiplices ordinatæ, sunt in serie harmonica naturali.

*Hypoth.*

Esto quantitas *u*, cuius submultiplices *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c.

Dico *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. esse in serie harmonica naturali.

*Demonst.*

| | |
|---|---|
| 19. *b.* | *u*, 2, 3, 4, &c. sunt in serie arithmetica. |
| 15. *b.* | *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. sunt in serie harmonica. |
| *hypoth.* | *u*; *u* (2): est dupla. |
| *def.20b* | *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. sunt in serie harmonica naturali. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 21. *Prop.* 21.

IN duabus ſeriebus arithmeticis naturalibus, termini ſunt ſimiliter proportionales, in proportione ordinata.

*Hypoth.*

Sint duæ ſeries arithmeticæ naturales: vna *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, &c. altera *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, &c.

Dico *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, eſſe ſimiliter proportionales atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata.

*Demonſtr.*

*def.* 11. *b.* | Defectus deinceps *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, ſunt æquales inter ſe, & ipſi primo termino *a*. item defectus deinceps *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, ſunt ęquales interſe, & ipſi *b*.

*def.* 12. *b* | *a*; 2*a*: *b*; 2*b*.

2. *p.* | 2*a*; 3*a*: 2*b*; 3*b*:

2. *p.* | 3*a*; 4*a*: 3*b*; 4*b*.

*def.* 18. 5 | *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, ſunt ſimiliter proportionales, atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 22. *Prop.* 22.

IN duabus ſeriebus harmonicis naturalibus, termini ſunt ſimiliter proportionales, in proportione ordinata.

*Hypoth.*

Sint duæ ſeries harmonicæ naturales: vna, *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4): altera *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4).

Dico

Dico *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4), esse similiter proportionales, atque *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4), in proportione ordinata.

*Demonstr.*

*def.20b* | *a*; *a* (2): *b*; *b* (2).
2. *p.* | *a*,—*a* (2); *a* (2): *b*,—*b* (2); *b* (2).
| Esto, si potest, *a* (2); *a* (3): maior, quàm *b* (2); *b* (3).
4. 3. | *a* (2); *a* (2)—*a* (3): minor, quàm *b* (2); *b* (2)—*b* (3).
*p.* 3. | *a*,—*a* (2); *a* (2)—*a* (3): minor quàm *b*,—*b* (2); *b* (2)—*b* (3).
*def.18b* | *a*,—*a* (2); *a* (2)—*a* (3): *a*; *a* (3).
*def.18b* | *b*,—*b* (2); *b* (2)—*b* (3): *b*; *b* (3).
*p.* 3. | *a*; *a* (3): minor, quàm *b*; *b* (3).
*def.20b* | *a* (2); *a*: *b* (2); *b*.
*p.* 3. | *a* (2); *a* (3): minor, quàm *b* (2); *b* (3). contra suppositum.
| *a* (2); *a* (3): *b* (2); *b* (3).
*sup.* | *a* (3); *a* (4): *b* (3); *b* (4).
*def.18.5* | *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4) sunt similiter proportionales, atque *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4) in proportione ordinata. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor.* 23. *Prop.* 23.

DVarum serierum naturalium arithmeticè, & harmonicè, inter æqueordinatos terminos, medij pro-

portionales sunt æquales.

*Hypoth.*

Sint duæ series naturales: vna arithmetica, ab *a*; altera harmonica, à *b*. & sint quarti termini; in arithmetica, 4*a*; in harmonica, *b* (4). sit autem inter *a*, *b*, media proportionalis *c*.

Dico *c*, mediam proportionalem esse, inter 4*a*, & *b* (4).

*Demonstr.*

Quoniam 4*a*, *b* (4), sunt quarti termini, in suis seriebus: 4*a* ad *a*, est quadruplus: & *b* (4) ad
19. *h.* *b* subquadruplus.
20. *h.* 4*a*; *a*: *b*; *b* (4).
*hypoth.* *a*; *c*: *c*; *b*.
*p. p.* 4*a*; *c*: *c*; *b* (4). Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 24. Prop. 24.*

IN serie arithmetica duo termini, cum æqueordinatis in harmonica, sunt reciprocè proportionales.

*Hypoth.*

Sint in serie arithmetica duo termini 3*a*, 4*a*: & in harmonica duo æqueordinati *b* (3), *b* (4).

Dico 3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3).

*Præpar.*

Assumatur inter æqueordinatos 3*a*, & *b* (3), medius proportionalis *c*.

De-

*Demonstr.*

*constr.* | 3*a*; *c*: *c*; *b* (3).
*23. h.* | 4*a*; *c*: *c*; *b* (4).
*2. p.* | *c*; 4*a*: *b* (4); *c*.
*p. p.* | 3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3). Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 25. Prop. 25.*

SEries naturales, arithmetica, & harmonica, plures terminos habent, quàm quot quiſque dixerit, & cuiuſq; numeroſæ rationis.

*Demonstr.*

*20. 9.* Nam numeri plures ſunt, quàm quot quiſque
*19. h.* dixerit, ſecundum quos accepti multiplices ad
*20. h.* primum terminum in ſerie arithmetica, & ſubmultiplices ad primum in harmonica, ſunt plures termini, quàm quot quiſque dixerit.

Quod ſi multiplices accepti fuerint, ſecundum
*21. h.* numeros numeroſæ rationis: erunt in arithmetica ſerie termini, eamdem numeroſam habentes rationem. item ſi accepti fuerint ſubmultiplices:
*24. h.* erunt in harmonica, termini, eamdem reciprocè numeroſam habentes rationem.

Deinde numeri bini, eamdem numeroſam habentes rationem, minimi omnium, & minimorum
*20. 9.* æquemultiplices numeri, ſecundum plures, quàm quot quiſque dixerit numeros, poſſunt accipi: ſe-

cun-

sup. cundum quos acceptos binos numeros, termini multiplices in arithmetica, & submultiplices in harmonica, possunt accipi bini plures, quàm quot quisque dixerit, eamdem numerosam habentes rationem.

Quare &c.

---

*Theor. 26. Prop. 26.*

IN serie arithmetica naturali ab vnitate, termini sunt, vnitas, & omnes numeri ordinatim accepti.

*Demonstr.*

Nam in serie arithmetica naturali ab vnitate,
19. h. omnes termini sunt, ipsa vnitas, & omnes multiplices ad vnitatem, ordinatim accepti: sed numeri sunt multiplices ad vnitatem; & eorum ordo, est idem multiplicium. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 27. Prop. 27.*

IN serie harmonica naturali à rationali, termini sunt, ipsa rationalis, & fractiones, pro communi numeratore, habentes rationalem, & pro denominatoribus, habentes ordinatim omnes numeros.

*Demonstr.*

Nam in serie harmonica naturali à rationali,
20. h. termini sunt, ipsa rationalis, & omnes eius sub-
def. 29 h multiplices ordinatim accepti. Sed fractiones,

in

in quibus ipſa rationalis eſt numerator communis, & omnes numeri ſunt denominatores, ipſæ ſunt ſubmultiplices ad rationalem; & earum ordo, eſt idem ordo numerorum, per quos ipſæ ſubmultiplices ordinantur. Ergo &c,

Quare &c.

---

*Theor.* 28. *Prop.* 28.

SI fuerint duæ ſeries totidem terminorum; & inter primos, idem fuerit medius proportionalis, qui inter ſecundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: ſiquidem in prima ſerie, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti; in ſecunda ſerie, ſunt quatuor harmonicè diſpoſiti.

*Hypoth.*

Sint in prima ſerie, quatuor arithmeticè ordinati, $a$, $a+b$, $c$, $c+b$: ſit medius $d$: & ſint in altera ſerie ordinati $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$.

Dico $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$ eſſe harmonicè diſpoſitos.

*Demonſtr.*

*hypoth.* Quoniam $a$ ad $d$, eſt vt $d$ ad $d2\ (a)$; ideſt quatuor proportionalium prima quantitas
*11. h.* eſt $a$, ſecunda & tertia eſt $d$: ergo quarta eſt fractio, cuius numerator, ſecunda poteſtas $d$; denominator, prima quantitas $a$. Similiter oſtendetur quod $d2\ (a+b)$, eſt ſecuuda poteſtas $d$, denominata per $a+b$: & $d2\ (c)$, ſecunda poteſtas $d$, denominata per $c$: & denique $d2$ $(c+b)$,

$(c+b)$, secunda potestas $d$, denominata per $c+b$: Ergo $d2(a)$, $d2(a+b)$, $d2(c)$, $d2(c+b)$, sunt quatuor fractiones: quarum numerator communis, secunda potestas $d$; denominatores verò, sunt quatuor arithmeticè dispositi, $a$, $a+b$, $c$, $c$

14. *h.* $+d$. Ergo $d2(a)$, $d2(a+b)$, $d2(c)$, $d2(c+b)$, sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 29. Propos. 29.*

QVorum productorum quidam sunt communes, quidam non communes producentes, aggregatum, est productus producentium communium, & aggregati producentium non communium.

*Hypoth.*

Duorum productorum $ab$, $ac$, communis producens esto $a$: non communes sunto $b$, $c$; quorum summa $d$.

Dico $ab+ac$: $ad$.

*Demonstr.*

9. *h.* | $ab$; $ac$: $b$; $c$.
2. *p.* | $ab+ac$; $ac$: $b+c$; $c$.
*hypoth.* | $b+c$: $d$.
7. 5. | $ab+ac$; $ac$: $d$; $c$.
9. *h.* | $ad$; $ac$: $d$; $c$.
11. 5. | $ab+ac$; $ac$: $ad$; $ac$.
9. 5. | $ab+ac$: $ad$. Quod &c. Quarè &c.

*Theor.* 30. *Prop.* 30.

Quorum productorum quidam sunt communes, quidam non communes, & inæquales producentes, differentia, est productus producentis communis, & differentiæ producentium non communium.

*Hypoth.*

Duorum productorum *ab*, *ac*, communis producens esto *a*, non communes sunto *b*, *c*: & esto *b* maior, quàm *c*; quorum differentia *d*.

Dico *ab*--*ac*: *ad*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 9. *h.* | *ab*; *ac*: *b*; *c*. |
| 2. *p.* | *ab*---*ac*; *ac*: *b*---*c*; *c*. |
| *hypoth.* | *b*---*c*: *d*. |
| 7. 5. | *ab*--- *ac*; *ac*: *d*; *c*. |
| 9. *h.* | *ad*; *ac*: *d*; *c*. |
| 11. 5. | *ab*--- *ac*: *ad*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 31. *Prop.* 31.

Quatuor proportionalium productus extremorum, est æqualis producto mediorum.

*Hypoth.*

Sunto proportionales *a*; *b*: *c*; *d*.

Dico *ad*: *bc*.

*Præpar.*

Assumatur productus alternorum *ac*.

*Demonstr.*

9. *h.* | *ac*; *ad*: *c*; *d*.
9. *h.* | *ac*; *bc*: *a*; *b*.
*hypoth.* | *a*; *b*: *c*; *d*.
11. 5. | *ac*; *ad*: *ac*; *bc*.
9. 5. | *ad*: *bc*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 32. *Prop.* 32.

QVatuor termini, quorum extremorum productus est æqualis producto mediorum, sunt proportionales.

*Hypoth.*

Quatuor terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, productus extremorum *ad*, & productus mediorum *bc*, sunt æquales.

Dico *a*; *b*: *c*; *d*.

*Præpar.*

Assumatur productus alternorum *ac*.

*Demonstr.*

7. 5. | *ac*; *bc*: *ac*; *ad*.
9. *h.* | *ac*; *bc*: *a*; *b*.
9. *h.* | *ac*; *ad*: *c*; *d*.
11. 5. | *a*; *b*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 33. *Prop.* 33.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos idem fuerit medius proportionalis, qui inter secun-

cundos, inter tertios, & deinceps inter æquecordinatos: siquidem in prima serie, sunt quatuor harmonicè dispositi; in secunda serie, sunt quatuor arithmeticè dispositi.

*Hypoth.*

Sint in prima serie quatuor harmonicè ordinati $a$, $b$, $c$, $d$: & sit medius $e$: & sint in altera serie ordinati $e2\,(a)$, $e2\,(b)$, $e2\,(c)$, $e2\,(d)$.

Dico $e2\,(a)$, $e2\,(b)$, $e2\,(c)$, $e2\,(d)$, esse arithmeticè dispositos.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| def. 13. b. | $a$ — $b$; $c$ — $d$: $a$; $c$, + $b$; $d$. |
| 8. b. | $ab$; $cd$: $a$; $c$, + $b$; $d$. |
| 11. 5. | $a$ — $b$; $c$ — $d$: $ab$; $cd$. |
| 30. & 31. b. | $acd$ --- $bcd$: $abc$ --- $abd$. |
| | adhibito communi producente $e2$. |
| 9. b. | $e2acd$ --- $e2bcd$: $e2abc$ --- $e2abd$. |
| | communiter denominando per $abcd$. |
| 10. & 13. b. | $e2\,(b)$ --- $e2\,(a)$: $e2\,(d)$ --- $e2\,(c)$. |
| def. 5. b. | $e2\,(a)$, $e2\,(b)$, $e2\,(c)$, $e2\,(d)$, sunt arithmeticè dispositi. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 34. Prop. 34.*

QVatuor termini harmonicè dispositi, permutando, sunt harmonicè dispositi.

*Hypoth.*

Sint quatuor termini $a$, $b$, $c$, $d$, harmonicè dispositi.

Dico permutando *a, c, b, d* esse harmonicè dispositos.

*Præpar.*

Assumatur quælibet quantitas *e*, & fiat

*a*; *e*: *e*; *f*.
*b*; *e*: *e*; *g*.
*c*; *e*: *e*; *h*.
*d*; *e*: *e*; *l*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *a, b, c, d* sunt harmonicè dispositi. |
| 33. *h.* | *f, g, h, l* sunt arithmeticè dispositi. |
| 4. *h.* | *f, h, g, l* sunt arithmeticè dispositi. |
| 28. *h.* | *a, c, b, d* sunt harmonicè dispositi. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 35. *Prop.* 35.

SI fuerint aliquot quantitates in una serie, similiter harmonicæ dispositæ, atque aliæ totidem, in altera: erunt ex æqualitate harmonica, prima & vltima, in vna serie, item prima & vltima, in altera, dispositæ harmonicè.

*Hypoth.*

Sint *a, b, c* similiter harmonicè dispositæ, atque aliæ totidem *d, e, f*.

Dico ex æqualitate harmonica, esse dispositas harmonicè, *a, c,* & *d, f*.

*Præpar.*

Assumatur quælibet quantitas *g*. & fiat

*a*; *g*;

$a; g: g; h$

$b; g: g; k$

$c; g: g; l$

$d; g: g; m$

$e; g: g; n$

$f; g: g; o.$

*Demonstr.*

def.16b | $a, b, d, e$ sunt harmonicè dispositæ.
33. b. | $h, k, m, n$ sunt arithmeticè dispositæ.
def.16b | $b, c, e, f$ sunt harmonicè dispositæ.
33. b. | $k, l, n, o$ sunt arithmeticè dispositæ.
def.8.b. | $h, k, l$ sunt similiter arithmeticè dispositæ, atque $m, n, o$.
5. b. | $h, l, m, o$ sunt arithmeticè dispositæ.
28. b. | $a, c, d, f$ sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 36. Prop. 36.*

HArmonicè dispositarum ęquesubmultiplices, sunt harmonicè dispositæ.

*Hypoth.*

Sint harmonicè dispositæ $a, b, c, d$: quarum æque submultiplices $a(3), b(3), c(3), d(3)$.

Dico $a(3), b(3), c(3), d(3)$ esse harmonicè dispositas.

*Præpar.*

Assumatur quælibet quantitas $e$. & fiat

$a; e:$

*a*; *e*: *e*; *f*
*b*; *e*: *e*; *g*
*c*; *e*: *e*; *h*
*d*; *e*: *e*; *l*

Et quotuplices sunt *a*, *b*, *c*, *d* ad *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3), totuplices accipiantur ipsarum *f*, *g*, *h*, *l*, quæ quæ sint 3*f*, 3*g*, 3*h*, 3*l*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *a*, *b*, *c*, *d*, sunt harmonicè dispositæ, |
| 33. *h.* | *f*, *g*, *h*, *l*, sunt arithmeticè dispositę. |
| 6. *h.* | 3*f*, 3*g*, 3*h*, 3*l*, sunt arithmeticè dispositæ. |
| *præpar.* | *a*(3); *a*: *f*; 3*f*. |
| *præpar.* | *a*; *e*: *e*; *f*. |
| *p. p.* | *a*(3); *e*: *e*; 3*f*. |
| *sup.* | *b*(3); *e*: *e*; 3*g*. |
| *sup.* | *c*(3); *e*: *e*; 3*h*. |
| *sup.* | *d*(3); *e*: *e*; 3*l*. |
| 28. *h.* | *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3) sunt harmonicè dispositæ. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 37. Prop. 37.*

SI fuerint aliquot primæ quãtitates, arithmeticè similiter dispositæ, atque aliæ totidem secundæ, vtræque in vna serie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem secundæ in altera: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & in-

& inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; item inter primas ſecundarum, & inter ſecundas, & deinceps inter æqueordinatas: erunt in ſecunda ſerie primæ ſimiliter harmonicè ordinatæ, atque ſecundæ.

*Demonſtr.*

Quoniam enim primarum in prima ſerie prima,
def. 8. h. & ſecunda; & ſecundarum in prima ſerie prima,
28. h. & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ: conſtat, quod etiam in ſecunda ſerie primarum prima, & ſecunda; & ſecundarum prima, & ſecunda, ſunt harmonicè diſpoſitę. conſtat ſimiliter, quod in ſecunda ſerie, primarum ſecunda, & tertia; & ſecundarum ſecunda, & tertia ſunt harmonicè diſpoſitæ. Et ita deinceps vſque ad vltimas prima-
def. 6. h. rum, & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter harmonicè ordinatę, atque ſecundæ.

---

*Theor.* 38. *Prop.* 38.

SI fuerint aliquot primæ quantitates harmonicè ſimiliter diſpoſitæ, atque aliæ totidem ſecundæ, vtræque in vna ſerie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem ſecundæ, in altera ſerie: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; necnon media proportionalis inter primas ſecundarum, & inter ſecundas ſecundarum, & deinceps

ceps inter æqucordinatas: erunt in altera ſerie, primæ ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecundæ.

*Demonſt.*

def.16b Quoniam enim primarum in prima ſerie, prima & ſecunda, & ſecundarum in prima ſerie, prima & ſecunda, ſunt harmonicè diſpoſitæ: conſtat,
33. b. quod & in ſecunda ſerie; primarum prima & ſecunda, & ſecundarum prima & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. item oſtendetur, quod primarum in ſecunda ſerie ſecunda, & tertia, & ſecundarum ſecunda & tertia, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. & ſic deinceps vſque ad vltimas primarum,
def.8.b. & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecūdę.

---

*Theor. 39. Prop. 39.*

INter duas quantitates media proportionalis, eadem eſt etiam inter ſubmultiplicem vnius, & æquemultiplicem alterius.

*Hypoth.*

Eſto inter duas $a$, $b$, media proportionales $c$: & eſto ipſius $a$, ſubmultiplex $a(3)$; & ipſius $b$, æquemultiplex $3b$.

Dico $a(3);\ c:\ c;\ 3b.$

*Demonſtr.*

hypoth. $a(3);\ a:\ b;\ 3b.$
hypoth. $a;\ c:\ c;\ b.$
p. p. $a(3);\ c:\ c;\ 3b.$ Quod &c. Quare &c.

*Theor.* 40. *Prop.* 40.

IN ſerie harmonica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum ſubmultiplicati; ſicut primi quotientes, ſimiliter ſecundi, ſunt harmonicè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

*Hypoth.*

Sint in ſerie harmonica naturali duo termini *a*, *b*: & ab *a*, ſumantur terni ſubquadrupli; & à *b*, quaterni ſubtripli.

Dico primos ternos ſubquadruplos ab *a*, & primos ſubtriplos à *b*, ſimiliter eſſe diſpoſitos harmonicè; atque ſecundos ſubquadruplos ternos ab *a*, & ſecundos ſubtriplos quaternos à *b*.

*Præpar.*

Ordinetur ſeries arithmetica naturalis: in qua ſint, *c* æqueordinatus, atque *a*; & *d* æqueordinatus, atque *b*. ſumanturque quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*. ſumatur etiam inter *a*, & *c* medius proportionalis *e*.

*Demonſtr.*

*conſtr.* Quoniam *e*, medius proportionalis eſt inter *a*, *c*: medius etiam proportionalis eſt inter *b*, *d*; &
23. *b.* inter æqueordinatos terminos in vtraque ſerie na-
39. *b.* turali arithmetica, & harmonica. item eſt medius proportionalis inter multiplices terminorum arithmeticæ ſeriei naturalis, & inter æqueſubmulti-
7. *b.* plices terminorum harmonicæ. ſed quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*, primi, ſunt ſimiliter

arithmeticè dispositi, atque secundi; item, atque
37. b. tertij, atque quarti, & deinceps. Ergo etiam subquadrupli terni ab $a$, & subtripli quaterni à $b$, primi, sunt similiter harmonicè dispositi, atque secundi; item, atque tertij, atque quarti, & deinceps. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 41. *Propos.* 41.

SVmma fractionum communem habentium denominatorem, est summa numeratorum, ab eodem denominatore denominata.

*Hypoth.*

Fractiones $a(b)$, $c(b)$ communem habent denominatorem: numeratorum summa est $a+c$.

Dico $a(b)+c(b):\ a+c(b)$.

*Demonstr.*

10. h. | $a(b);\ c(b):\ a;\ c$.
2. p. | $a(b)+c(b);\ c(b):\ a+c;\ c$.
10. h. | $a+c(b);\ c(b):\ a+c;\ c$.
11. 5. | $a(b)+c(b);\ c(b):\ a+c(b);\ c(b)$.
9. 5. | $a(b)+c(b):\ a+c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 42. *Prop.* 42.

DIfferentia fractionum communem habentium denominatorem, est differentia numeratorum, ab eodem

dem denominatore denominata.

*Hypoth.*

Fractiones $a(b)$, $c(b)$, communem habent denominatorem $b$: differentia numeratorum est $a - c$.

Dico $a(b) - c(b)$: $a - c(b)$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 10. b. | $a(b)$; $c(b)$: $a$; $c$. |
| 2. p. | $a(b) - c(b)$; $c(b)$: $a - c$; $c$. |
| 10. b. | $a - c(b)$; $c(b)$: $a - c$; $c$. |
| 11. 5. | $a(b) - c(b)$; $c(b)$: $a - c(b)$; $c(b)$. |
| 9. 5. | $a(b) - c(b)$: $a - c(b)$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor. 43. Prop. 43.*

DVorum inęqualium numerorum, vnitas denominata à minore, & differentia denominata à maiore, sunt fractiores duæ, quarum summa est maior, quàm differentia eorumdem, aucta vnitate, denominata à maiore.

*Hypoth.*

Sunto duo inæquales numeri, minor $a$, maior $a+b$.

Dico $1(a) + b(a+b)$: maiorem esse, quàm $b + 1(a+b)$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 12. b. | $1(a)$; $1(a+b)$: $a+b$; $a$. |
| | $1(a)$: maior quàm $1(a+b)$. |
| | communiter addatur $b(a+b)$. |
| 41. b. | $1(a) + b(a+b)$: maior est, quàm $b + 1(a+b)$. |
| | Quod &c. Quare &c. |

---

*Theor.* 44. *Prop.* 44.

QValibet quantitate, à se ipsa, & à suis deinceps per ordinem multiplicibus, denominata; fit series harmonica naturalis.

*Hypoth.*

Esto quælibet quantitas $a$, eiusque multiplices $2a$, $3a$, $4a$, & deinceps.

Dico $a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$, & deinceps esse seriem harmonicam naturalem.

*Præpar.*

Esto rationalis $u$: & à rationali ordinetur series harmonica naturalis $u$, $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$, & deinceps.

*Demonstr.*

*def.*29*h* | $a$; $u$: $a$; $a(a)$.

9. 5. | $u$: $u(a)$.

12. *h.* | $a(a)$; $a(2a)$: $2a$; $a$: $u$; $u(2)$ dupla.

9. 5. | $a(2a)$: $u(2)$.

*sup.* | $a(3a)$: $u(3)$.

*sup.* | $a(4a)$: $u(4)$.

*def.*20*h* | $a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$; est series harmonica naturalis. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 45. *Prop.* 45.

SI fuerint duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate; alter, ex quotcunque terminis; alter, ex totidem, & vno amplius: erit qui ex pluribus, eo qui ex paucioribus, perspectè maior.

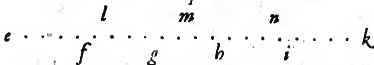
*Hy-*

*Hypoth.*

Sunto duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate: alter *A*, ex tot terminis, quotus eſt numerus *b*: alter *C*, ex tot, quotus eſt *d*. & eſto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico *C*, perſpectè maiorem eſſe, quàm *A*.

*Præpar.*



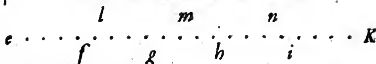

Sumatur numerus *b* toties, quotus eſt *d*: & ſint ſumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*. Item ſumatur numerus *d* toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti *el*, *lm*, *mn*, *nk*.

*Demonſtr.*

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b*: ſumma numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, eſt æqualis ſummæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nk*, eſtque idem numerus *ek*. Et quoniam *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, ſunt æquales inter ſe: ergo *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *ek*, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Item quoniam *el*, *lm*, *mn*, *nk*, ſunt æquales: ergo *el*, *em*, *en*, *ek*, ſunt ſimplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior eſt, quàm *b*: ergo 2*d*, binario maior eſt, quàm 2*b*: & 3*d*, ternario maior eſt, quàm 3*b*: & ſic deinceps, & ſimiliter *el*, vnitate maior, quàm *ef*: & *em*, binario maior, quàm *eg*: & *en*, ternario

maior,




maior quàm *eh*: & sic deinceps. item similiter *nk*, vnitate maior, quàm *ik*: & *mk*, binario maior, quàm *hk*: & *lk*, ternario maior, quàm *gk*. Quare *fl*, *gm*, *hn*, & deinceps, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *in*, *hm*, *gl*, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Est ergo *ef*, vnitate maior, quàm *lg*; & *lg*, vnitate maior, quàm *mh*; & *mh*, vnitate maior, quàm *ni*; & *ni*, est vnitas.

Cum itaque tres sint quantitates inæquales *ef*, *el*, *eg*, quarum *ef* minima, *el* media, *eg* maxima.

3. h. si *lg*, vnitate aucta, denominetur ab *ef*; & *fl*, ab *eg*: fiunt duæ fractiones, quarum summa, maior est, quàm *fg* vnitate aucta, denominata ab *el*. Sed *lg*, vnitate aucta, est *ef*; & *fg*, vnitate aucta, est *el*: ergo

*ef* (*ef*) + *fl* (*eg*): maior est, quàm *el* (*el*).

Similiter ostendetur,

*lg* (*eg*) + *gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).

Et *ml* (*eh*) + *hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

Deinde, cum duo sint inæquales numeri, *ei*,

43. h. *ek*; quorum minor *ei*, maior *ek*, differentia *ik*: sitque vnitas *ni*: & differentia *ik*, vnitate aucta, sit *nk*. ergo

*ni* (*ei*) + *iK* (*eK*): maior est, quàm *nK* (*eK*.

44. h. Sed *ef* (*ef*), *fl* + *lg* (*eg*), *gm* + *mh* (*eh*), *hn* + *ni* (*ei*),

$(ei)$, $iK(eK)$ ſunt termini componentes prologarithmum $C$. nam $ef$, $fl+lg$, $gm+mh$, $hn+ni$, $iK$, ſunt numeratores æquales ipſi $b$, quos denominant, $ef$, $eg$, $eh$, $ei$, $eK$, nempe ſimplex $b$, duplex, triplex, & deinceps multiplices.

Eadem ratione conſtat, quod $el(el)$, $lm(em)$, $mn(en)$, $nK(eK)$ ſunt termini componentes prologarithmum $A$.

def. 26. b. Ergo $C$, peſpectè maior eſt, quàm $A$. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 46. Prop. 46.*

SI duorum inæqualium numerorum differentia, denominetur à minore; vnitas verò, à maiore: fiunt duæ fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia, vnitate aucta, denominata à minore.

*Hypoth.*

Sunto duo inæquales numeri $a$, $a+b$.

Dico $b(a)+1(a+b)$: minorem eſſe, quàm $b+1(a)$.

*Demonſtr.*

12. b. $1(a+b)$; $1(a)$: $a$; $a+b$.

$1(a+b)$: minor, quàm $1(a)$.

addito communi $b(a)$.

41. b. $b(a)+1(a+b)$: minor, quàm $b+1(a)$. Quod &c.

Quare &c.

---

Theo-

*Theor. 47. Prop. 47.*

SI fuerint prologarithmi ex duobus terminis à secundo, ex tribus à tertio, ex quatuor à quarto, & sic deinceps: qui ex pluribus, perspectè minor est, quàm, qui ex paucioribus vno.

*Hypoth.*

Sint duo prologarithmi; alter *A*, ex terminis ab 1(*b*); & ex tot terminis, quotus est *b*; alter *C*, ex terminis ab 1 (*d*), & ex tot terminis, quotus est *d*: & esto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Constat, quod 1(*b*), totus ordine est, quotus, est *b*: & 1 (*d*), totus ordine, quotus est *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico *C*, perspectè minorem esse, quàm *A*.

*Præpar.*

*m* *n* *o*

*e*---20---*f*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *l*

*g* *h* *i* *k*

Sumatur productus *bd*, qui sit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus est *d*, qui sint *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus est *b*, qui sint *fm*, *mn*, *no*, *ol*.

*Demonstr.*

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, & productus *d* per *b*, sunt æquales: summa numerorum *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*, summæ *fm*, *mn*, *no*, *ol*, est æqualis: estque idem numerus *fl*. Et quoniam *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*, sunt æquales: ergo *fg*, *fh*, *fi*, *fK*, *fl*, sunt simplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps

s multiplices. Item quoniam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, sunt les: ergo *fm*, *fn*, *fo*, *fl*, sunt simplex *d*, duplex, :x, & reliqui deinceps multiplices. Sed *ef*, ad *b* to-:x est, quotus est $d+1$: & *eh*, quotus est $d+2$: ideo- *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *eK*, sunt totuplices ad *b*, quoti sunt $d+1$, $d+2$, $d+3$, $d+4$. Item cum sit *ef*, ad *d* totu-c, quotus est *b*: erunt *ef*, *em*, *en*, *eo*, totuplices ad quoti sunt *b*, $b+1$, $b+2$, $b+3$.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior est, quàm *b*: ergo *l*, binario maior est, quàm $2b$: & $3d$, ternario maior, ıàm $3b$; & sic deinceps, & similiter *fm*, vnitate maior, ıàm *fg*; & *fn*, binario maior, quàm *fh*; & *fo*, terna-o maior, quàm *fi*; & sic deinceps. item similiter *ol*, nitate maior, quàm *Kl*; & *nl*, binario maior, quàm *il*; *ml*; ternario maior, quàm *hl*. Quare *gm*, *hn*, *io*, sunt ınitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *oK*, *ni*, *mh*, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Ergo *gm*, auctus vnitate, est *hn*; & *hn*, auctus vnitate, est *io*; & *io*, auctus vnitate, est *iK*, vel *b*.

Itaque sunt inæquales, & minores primùm, deinde maiores hoc ordine, *ef*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *eo*, *eK*: quorum minimus *ef*, est productus *bd*: & differentia *ef*, *eg*, est *fg*, nempe *b*: est
9. b. autem *bd* ad $b2$, sicut *d* ad *b*, maior: ergo minimus *ef*, non est minor, quàm secunda potestas differentiæ *ef*, *eg*. ideoque neque *eg*, minor est, quàm secunda potestas differentiæ *eg*, *eh*.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\quad\quad m \quad\quad n \quad\quad o \\ e—20—f\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots l \\ \quad\quad\quad\quad g \quad\quad h \quad\quad i \quad\quad K \end{array}$$

neque *eh*, minor, quàm secunda potestas differentiæ *eh*, *ei*. neque *ei*, minor, quàm secunda potestas differentiæ *ei*, *ek*.

Quare si *fg*, denominetur ab *ef*; & vnitas *gm*,
46. b. denominetur ab *eg*: summa fractionum, minor est, quàm si *fg*, aucta vnitate, denominetur ab *ef*. est autem *fg*, aucta vnitate, æqualis ipsi *fm*: ergo

$fg(ef)+gm(eg)$: minor est, quàm $fm(ef)$.

2. b. Item si *mh* denominetur ab *eg*; & *gm*, aucta vnitate, id est *hn* denominetur ab *eh*: summa fractionum, minor est, quàm si *gh*, aucta vnitate, id est *mn*, denominetur ab *eh*.

$mh(eg)+hn(eh)$: minor est, quàm $mn(eh)$.

Similiter ostendetur, quod

$ni(eh)+io(ei)$: minor est, quàm $no(en)$.

Et quòd

$oK(ei)+Kl(eK)$: minor est, quàm $ol(eo)$.

Sed $fg(ef)$, $gm+mh(eg)$, $hn+ni(eh)$, $io+oK(ei)$, $Kl(eK)$, sunt $1(d)$, $1(d+1)$, $1(d+2)$, & deinceps reliqui termini, tot, quotus est *d*, componentes prologarithmum *C*. nam *fg*, est *b*: & *ef*, est productus *bd*: & $fg(ef)$, est $b(bd)$; id est, $1(d)$.
13. b. item $gm+mh$ est *b*: & *eg*, est $bd+b$: & $gm+mh(eg)$, est $b(bd+b)$; id est, $1(d+1)$. & sic deinceps.

Simi-

13. *h.* Similiter *fm*(*ef*), *mn*(*em*), *no*(*en*), *ol*(*eo*), sunt 1(*b*), 1(*b*+1), & deinceps reliqui termini, tot, quotus est *b*, componentes prologarithmum *A*. nam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, sunt *d*: & *ef*, *em*, *en*, *eo*, sunt *bd*, *bd*+*d*, *bd*+2*d*, *bd*+3*d*, & ipsę fractiones
13. *b.* sunt *d*(*bd*), *d*(*bd*+*d*), *d*(*bd*+2*d*), *d*(*bd*+3*d*); idest, 1(*b*), 1(*b*+1). &c.

*def.*27*b* Ergo *C*, est perspectè minor, quàm *A*. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor.* 48. *Prop.* 48.

SI fuerint duæ series prologarithmorum, ex terminis ab vnitate; altera, ex quotcunque terminis; altera, ex totidem, & vno amplius: erit secundus prologarithmus ex pluribus, secundo ex paucioribus, perspectè maior: & tertius, tertio: & quartus, quarto: & sic deinceps singuli prologarithmi vnius seriei, singulis prologarithmis æquecordinatis alterius, perspectè sunt maiores.

*Hypoth.*

Sint duę series prologarithmorum ex terminis ab vnitate: altera *A*, ex tot terminis, quotus est numerus *b*: altera *C*, ex tot, quotus est *d*. & esto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico secundum prologarithmum seriei *C*, perspectè maiorem esse, secundo seriei *A*.

*Præpar.*

*l* *m* *n* *t* *u* *x*
*e* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *K*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *s*
*f* *g* *h* *i* *o* *p* *q* *r* .

Sumatur numerus *b* toties, quotus est *d*: & sint sumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*. item numerus *d* toties, quotus est *b*: & sint sumpti numeri *el*, *lm*, *mn*, *nK*. Sumatur iterum *b* toties, quotus est *d*: & sint sumpti numeri *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*. & iterum *d*, sumatur toties, quotus est *b*: & sint sumpti numeri *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*.

*Demonstr.*

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, est æqualis producto *d* per *b*: summa numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, summæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nK*, est æqualis: & summa numerorum *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*, summæ *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*, est æqualis. Sunt autem & singulæ partes *ek*, singulis *Ks* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *ef*, *el*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *ek*, ipsis *ko*, *kt*, *kp*, *ku*, *kq*, *kx*, *kr*, *ks*; singuli numeri, singulis ęquales; & eorum dif-
def. 8. h. ferentiæ æquales, & similes: atque omnes ordinatim accepti, vt supra, vsque ad *k*, similiter arithmeticè sunt dispositi, atque omnes reliqui, vsque ad
45. h. *s*. Et sicut demonstratum est, quòd
3. h. *ef*(*ef*)+*fl*(*eg*): maior est, quàm *el*(*el*).
3. h. *lg*(*eg*)+*gm*(*eh*): maior, quàm *lm*(*em*).
3. h. *mh*(*eh*)+*hn*(*ei*): maior, quàm *mn*(*en*).

*ni-*

*ni* (*ei*)+*ik*(*ek*): maior, quàm *nk* (*ek*).

ita in præſenti demonſtrabitur, eodem prorſus argumento, quòd

*ko* (*eo*)+*ot* (*ep*): maior eſt, quàm *kt* (*et*).

*tp* (*ep*)+*pu* (*eq*: maior, quàm *tu* (*eu*).

*uq* (*eq*)+*qx* (*er*): maior, quàm *ux* (*ex*).

*xr* (*er*)+*rs* (*es*): maior, quàm *xs* (*es*).

Item ſicut demonſtratum eſt, quòd

*ef* (*ef*), *fl*+*lg* (*eg*), *gm*+*mh* (*eh*), *hn*+*ni* (*ei*), *ik* (*ek*), ſunt termini componentes primum prologarithmum ſeriei *C*: & quòd *el* (*el*), *lm* (*em*), *mn* (*en*), *nK* (*eK*), ſunt componentes primum ſeriei *A*. ita demonſtrabitur in præſenti, quòd

*Ko* (*eo*), *ot*+*tp* (*ep*), *pu*+*uq* (*eq*), *qx*+*xr* (*er*), *rs*- (*es*), ſunt termini componentes prologarithmum ſecundum ſeriei *C*: & quòd *Kt* (*et*), *tu* (*eu*), *ux* (*ex*), *xs* (*es*), ſunt componentes ſecundum prologarithmum ſeriei *A*.

. *h*. Et omninò ſicut oſtenſum eſt, quòd primus ſeriei *C*, eſt perſpectè maior, primo ſeriei *A*: ita demonſtrabitur, quòd ſecundus ſeriei *C*, eſt perſpectè maior ſecundo ſeriei *A*. Quod &c.

[illegible]8.*h*.

Similiter oſtendetur, quòd & tertius tertio, & quartus quarto, ſunt perſpectè maiores: & quòd quiſque prologarithmus ſeriei *C*, perſpectè maior eſt, æqueordinato prologarithmo ſeriei *A*.

Quare &c.

*Theor. 49. Prop. 49.*

SI fuerint series prologarithmorum, ex binis à secundo, ex ternis à tertio, ex quaternis à quarto, & sic deinceps: secundus prologarithmus eius, quę ex pluribus, perspectè minor est, quàm secundus eius, quæ ex paucioribus vno: & tertius, perspectè minor, quàm tertius: & quartus, quàm quartus: & sic deinceps vnusquisque perspectè est minor, quàm suus æqueordinatus prologarithmus.

*Hypoth.*

Sint duæ series prologarithmorum: altera *A*, ex terminis ab 1(*b*), & ex totenis, quotus est *b*: altera *C*, ex terminis ab 1(*d*), & ex totenis, quotus est *d*. & esto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Constat, quòd 1(*b*) totus est ordine, quotus *b*: & 1(*d*), totus ordine, quotus *d*. *prop. 27. h.*

Dico secundum prologarithmum seriei *C*, perspectè minorem esse, secundo seriei *A*.

*Præpar.*

*m n o q s u*

*e*---20---*f*.... . ... .. .. .. ... . ....*l*.... . .. .. .. ... . ....*y*

*g h i K p r t x*

Sumatur productus *bd*, qui sit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus est *d*, qui sint *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus est *b*, qui sint *fm*, *mn*, *no*, *ol*, & iterum ipsi *el*, adijciantur tot *b*, quotus est *d*, qui sint *lp*, *pr*, *rt*, *tx*, *xy*: necnon iterum eidem *el*, adijciantur tot

*d*,

s est *b*, qui sint *lq, qs, su, uy.*

*Demonstr.*

Quoniam productus *b* per *d*, est æqualis producto *d* per *b*: summa numerorum *fg, gh, hi, iK, Kl,* summæ *fm, mn, no, ol,* est æqualis: & summa *lp, pr, rt, tx, xy,* summæ *lq, qs, su, uy,* æqualis. Sunt autem & singulæ partes *fl,* singulis *ly* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *fg, fm, fh, fn, fi, fo, fK,* ipsis *lp, lq, lr, ls, lt, lu, lx,* singuli numeri, singulis æquales: & eorum differentiæ æquales, & similes: additisque vtrimq; communibus numeris *ef, el,* etiam compositorum differentiæ sunt æquales & similes; & *ef, eg, em, eh, en, ei, eo, eK,* sunt similiter arithmeticè dispositi, atque *el, ep, eq, er, es, et, eu, ex.* Est autem *ef,* non minor, quàm secunda potestas *fg,* & est *el,* maior, quàm *ef*; & *lp* æqualis ipsi *fg*: ergo *el* non minor est, quàm secunda potestas *lp*: ideoque similiter etiam *ep,* non minor, quàm secunda potestas *pr*: & *er,* non minor, quàm secunda potestas *rt*: & *et,* non minor, quàm secunda potestas *tx.* Itaque sicut demonstratum est, quod

*fg* (*ef*)+*gm* (*eg*): minor est, quàm *fm* (*ef*).
*mh* (*eg*)+*hn* (*eh*): minor, quàm *mn* (*eh*).
*ni* (*eh*)+*io* (*ei*): minor, quàm *no* (*en*).
*oK* (*ei*)+*Kl* (*eK*): minor, quàm *ol* (*eo*).

Sic-

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad m \quad n \quad o \quad\quad q \quad s \quad u \\ c\text{--}20\text{--}f \ldots\ldots\ldots\ldots l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y \\ \quad\quad\quad g \quad h \quad i \quad K \quad\quad p \quad r \quad t \quad x \end{array}$$

Sic demonstrabitur, quòd

46. b. $lp(el)+pq(ep)$ minor est, quàm $lq(el)$.

2. b. $qr(ep)+rs(er)$ minor, quàm $qs(eq)$.

2. b. $st(er)+tu(et)$ minor, quàm $su(es)$.

2. b. $ux(et)+xy(ex)$ minor, quàm $uy(eu)$.

47. b. Item sicut demonstratum est, quòd

$fg(ef)$, $gm+mh(eg)$, $hn+ni(eh)$, $io+ok(ei)$, $Kl(ek)$.

componunt primum prologarithmum seriei *C*: & quòd

$fm(ef)$, $mn(em)$, $no(en)$, $ol(eo)$, componunt primum seriei *A*. sic

$lp(el)$, $pq+qr(ep)$, $rs+st(er)$, $tu+ux(et)$, $xy(ex)$, componunt secũdum prologarithmum seriei *C*: &

$lq(el)$, $qs(eq)$, $su(es)$, $uy(eu)$, componunt se-

47. b. cundum seriei *A*. Et omninò sicut primus seriei

def.8.b. *C*, perspectè est minor primo seriei *A*: ita secundus prologarithmus, est perspectè minor secundo. Quod &c.

Similiter ostendetur, quod & tertius tertio, & quartus quarto, sunt perspectè minores: & quod quisque prologarithmus seriei *C*; pespectè minor est, æqueordinato prologarithmo seriei *A*.

Quare &c.

*Theor. 50. Prop. 50.*

ſperlogarithmi rationum duplę, & ſuperparticula-
rium, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt mi-

*Præpar.*

A, ſeries harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*,
s prologarithmorum; *B* quidem, ex binis à ſecun-
ex ternis à tertio; *D*, ex quaternis à quarto; & ſic
s, à quotoquolibet, ex totenis.

*Demonſtr.*

Nam in ſerie arithmetica naturali, ratio ſubdupla, eſt inter minimos terminos, primum, & ſecundum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos minimorum; videlicet inter ſecundum, & quartum; inter tertium, & ſextum; inter quartum, octauum. Ergo reciprocè, in ſerie harmonica naturali, ratio dupla, eſt inter maximos terminos, primum, & ſecundum; deinde inter minores ordinatim ſubmultiplos maximorum; videlicet inter ſecundum, & quartum; inter tertium, & ſextum; inter quartum, & octauum. Ergo rationis duplę, inter maximos terminos primum, & ſecundum, hyperlogarithmus, eſt primus terminus ſeriei *A*, nempe vnitas. deinde inter minores terminos ſecundum, & quartum, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *B*, ex duobus à ſecundo, nempe ex ſecundo, & tertio. & inter tertium,

& ſextum, minores adhuc terminos, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus feriei *C*, ex tribus à tertio, nempe ex tertio, quarto, & quinto. Et deinceps inter minores terminos quartum, & octauum, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *D*, ex quatuor à quarto, nempe
47. *h.* ex quarto, quinto ſexto, & ſeptimo. Sed huiuſmodi primorum prologarithmorum, minor eſt qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hyperlogarithmorum duplæ rationis minor eſt, qui minores inter eſt terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rurſum in ſerie arithmetica naturali, ratio ſub-
26. *h.* ſeſquialtera, eſt inter minimos terminos, ſecun-
12. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. *h.* multiplos minimorum; videlicet inter quartum, & ſextum; inter ſextum, & nonum; inter octauum,
24. *h.* & duodecimum. Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio ſeſquialtera eſt inter maximos terminos, ſecundum, & tertium; deinde inter minores, ſubmultiplos maximorum, quartum, & ſextum; & inter minores, ſextum, & nonum; & ad-
*def.* 22 *h* huc inter minores, octauum, & duodecimum. Ergo rationis ſeſquialteræ inter maximos terminos, ſecundum, & tertium, hyperlogarithmus, eſt ſecundus ſeriei *A.* deinde inter minores, quartum, & ſextum, hyperlogarithmus, eſt ſecundus prologa-

logarithmus seriei *B*, ex duobus à quarto, nempe ex quarto, & quinto. & inter sextum, & nonum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *C*, ex tribus à sexto, nempe ex sexto, septimo, & octauo. & inter octauum, & duodecimum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *D*, ex quatuor ab octauo, nempe ex octauo, nono, decimo, & vndecimo. Sed in seriebus huiusmodi, secundorum prologarithmorum, minor est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo sesquialteræ rationis hyperlogarithmorum minor est, qui minores inter terminos, quàm qui est inter maiores. Quod &c.

iliter prorsus demonstratione ostendetur, de sesia ratione, adhibitis tertijs prologarithmis earumrierum: & de sesqui quarta, adhibitis quartis prohmis: & de omni superparticulari ratione.

ıre &c.

---

*Theor.* 51. *Propos.* 51.

Anis ratio multipla, vel est dupla, vel ex dupla & superparticularibus composita.

*Demonstr.*

Nam tripla 3 ad 1, ex sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1, componitur: quadrupla, 4 ad 1, ex sesquitertia, 4 ad 3, sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1: quintupla, 5 ad 1, ex sesquiquarta, 5

ad 4, sesquitertia, 4 ad 3, sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1. Et sic de reliquis.

Quare &c.

---

*Theor. 52. Prop. 52.*

OMnis ratio numerosa, ex superparticularibus componitur.

*Hypoth.*

Esto ratio numerosa *a* ad *b*.

Dico *a* ad *b* rationem ex superparticularibus esse compositam.

*Præpar.*

Assumantur numeri 8, 5, eamdem inter se rationem habentes *a* ad *b*. & inter 8, & 5. medij numeri. 7. 6.

*Demonstr.*

def. 56. Ratio 8 ad 5 ex rationibus 8 ad 7, 7 ad 6, 6 ad 5, componitur. Sed 8 ad 7, ratio numeri ad numerum vnitate minorem, est superparticularis, item 7 ad 6, 6 ad 5, sunt rationes superparticulares: ergo ratio numerosa, 8 ad 5, vel *a* ad *b*, ex rationibus superparticularibus componitur. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 53. Prop. 53.*

QVotcunque terminorum, è serie harmonica naturali, ordine quantitatis acceptorum, hyperlogarithmus

rithmus rationis compositæ inter extremos, componitur ex hypeɼlogarithmus rationum componentium, inter extremos, & medios. & hypologarithmus ex hypologarithmis.

*Hypoth.*

In serie harmonica naturali, sint tres termini $a$, $b$, $c$: & esto $a$, maior, quàm $b$; & $b$, maior, quàm $c$.

Dico rationis $a$ ad $c$, inter terminos $a$, $c$, hyperlogarithmum, ex, rationis $a$ ad $b$, inter $a$, $b$, & rationis $b$ ad $c$, inter $b$, $c$, hyperlogarithmis componi.

Et hypologarithmum, ex hypologarithmis.

*Præpar.*

Sumantur inter terminos $a$, $b$, omnes medij in serie harmonica naturali: necnon inter $b$, $c$. & sint inter $a$, $c$ termini.

$$a \quad g \quad h \quad i \quad b \quad K \quad l \quad m \quad n \quad c$$

*Demonstr.*

Hyperlogarithmus rationis $a$ ad $b$, inter terminos $a$, $b$, est $a+g+h+i$. Hyperlogarithmus rationis $b$ ad $c$, inter terminos $b$, $c$, est $b+K+l+m+n$. Hyperlogarithmus rationis $a$ ad $c$, inter terminos $a$, $c$, est $a+g+h+i+b+K+l+m+n$. ex vtrarumque rationum $a$ ad $b$; & $b$ ad $c$, hyperlogarithmis, inter eosdem terminos compositus. Quod &c.

Item rationis $a$ ad $b$, inter $a$, $b$, hypologarithmus est, $g+h+i+b$: & rationis $b$ ad $c$, inter $b$, $c$, est $K+l+m+n+c$: & rationis $a$ ad $c$, est $g+h+i+b+K+l+m+n+c$. ex vtrisque compositus. Quod &c. Quare &c.

*Theor. 54. Prop. 54.*

CViusque numerosæ rationis hyperlogarithmi, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt minores.

*Hypoth.*

Esto numerosa ratio inter seriei harmonicæ terminos ab vnitate, maiores $1(3a)$, $1(3b)$, & deinde inter minores $1(4a)$, $1(4b)$.

Dico inter $1(4a)$, $1(4b)$, minorem esse hyperlogarithmum, quàm inter $1(3a)$, $1(3b)$.

*Præpar.*

Assumantur minimi numeri in eadem ratione
21. 7. $a$, $b$: & deinceps maiores, nempe dupli, tripli,
27. h. quadrupli, donec inueniātur denominatores propositorum terminorum, $3a$, $3b$, $4a$, $4b$. Deinde inter $a$, $b$ ordinentur omnes medij, in serie arithmetica naturali, quorum deinceps supparticulares sunt rationes, $a$, $c$, $d$, $b$; & eorum æquemulti-
15. 5. pli $3a$, $3c$, $3d$, $3b$, easdem supparticulares habentes rationes deinceps; necnon & æquemultipli easdem habentes rationes $4a$, $4c$, $4d$, $4b$. Sumantur denique in serie harmonica termini, ab his denominati $1(3a)$, $1(3c)$, $1(3d)$, $1(3b)$: & $1(4a)$, $1(4c)$, $1(4d)$, $1(4b)$.

*Demonstr.*

24. h. Terminorum $1(4a)$, $1(4c)$, $1(4d)$, $1(4b)$ rationes deinceps, necnō terminorum $1(3a)$, $1(3c)$, $1(3d)$, $1(3b)$, reciprocè sunt eędem, quæ termi-

norum

norum 4a, 4c, 4d, 4b, necnon 3a, 3c, 3d, 3b:
50. b. ideſt, eædem ſuperparticulares. Quarum rationis inter 1(4a), 1(4c), minor eſt hyperlogarithmus, quàm inter 1(3a), 1(3c): & inter 1(4c), 1(4d), minor, quàm inter 1(3c), 1(3d): & inter 1(4d), 1(4b),
53. b. minor, quàm inter 1(3d), 1(3b). Et ex minoribus hyperlogarithmis, minor eſt hyperlogarithmus compoſitus, rationis compoſitæ inter extremos 1(4a), 1(4b), quàm ex maioribus, inter extremos 1(3a), 1(3b). Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 55. Prop. 55.*

HYperlogarithmi rationum duplæ, & ſuperparticularium, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt maiores.

*Præpar.*

Eſto *A* ſeries harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, ſeries prologarithmorum ab vnitate; *B* quidem, ex binis; *C*, ex ternis; *D*, ex quaternis; & ſic deinceps.

*Demonſt.*

def. 12. b. Nam in ſerie arithmetica naturali, ratio ſubdupla eſt inter minimos terminos, primum, & ſecun-
21. 7. dum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos
19. b. minimorum; videlicet inter ſecũdum, & quartum;
24. b. inter tertium, & ſextum; inter quartum, & octauũ.
def. 20 b Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio

dupla

dupla est inter maximos terminos, primum, & secundum; deinde inter minores ordinatim submultiplos maximorum; videlicet, inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum,
def.23b & octauum. Ergo rationis duplæ, inter maximos terminos primũ, & secundum, hypologarithmus, est secundus terminus seriei *A*, nempe 1(2). deinde inter minores terminos secundum, & quartum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *B*, ex duobus à tertio, nempe ex tertio, & quarto: & inter tertium, & sextum, minores adhuc terminos hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *C*, ex tribus à quarto, nempe ex quarto, quinto, & sexto. & deinceps inter minores terminos, quartum, & octauum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *D*, ex quatuor à quinto, nempe ex quinto sexto,
48. b. septimo, & octauo. Sed huiusmodi secundorum prologarithmorum, maior est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hypologarithmorum duplę rationis maior est, qui minores inter est terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rursum in serie arithmetica naturali, ratio sub-
26. b. sesquialtera, est inter minimos terminos, secun-
21. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. b. multiplos minimorum; videlicet, inter quartum, & sex-

& sextum; inter sextum,& nonum; inter octauum, & duodecimum. Ergo reciprocè in serie harmonica naturali, ratio sesquialtera est inter maximos terminos, secundum, & tertium; deinde inter minores, submultiplos maximorum, quartum, & sextum; & inter minores sextum, & nonum; & adhuc inter minores octauum, & duodecimum. Ergo rationis sesquialteræ inter maximos terminos, secundum, & tertium, hypologarithmus, est tertius seriei *A.* deinde inter minores, quartum,& sextum, hypologarithmus, est tertius prologarithmus seriei *B*, ex duobus à quinto, nempe ex quinto, & sexto. & inter sextum,& nonum, adhuc minores terminos, hypologarithmus est tertius seriei *C*, ex tribus à septimo, nempe ex septimo, octauo,& nono. & inter octauum,& duodecimum adhuc minores, hypologarithmus, est terutis seriei *D*, ex quatuor à nono, nempe ex nono, decimo, vndecimo, & duodecimo. Sed in seriebus huiusmodi, tertiorum prologarithmorum, maior est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo sesquialteræ rationis hypologarithmorum, maior est, qui minores inter terminos, quàm qui est inter maiores. Quod &c.

ili prorsus demonstratione ostendetur; de sesquiatione, adhibitis quartis prologarithms earumdem m: & de sesquiquarta, adhibitis quintis prologarithmis:


rithmis:

rithmis: & de omni ſuperparticulari ratione.

Quare &c.

---

*Theor. 56. Propoſ. 56.*

CViuſque numeroſæ rationis hypologarithmi, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt maiores.

*Hypoth.*

Eſto numeroſa ratio inter ſeriei harmonicæ naturalis terminos ab vnitate, maiores 1(3*a*), 1(3*b*), & deinde inter minores 1(4*a*), 1(4*b*).

Dico inter 1(4*a*), 1(4*b*), maiorem eſſe hypologarithmum, quàm inter 1(3*a*), 1(3*b*).

*Præpar.*

Aſſumantur minimi numeri in eodem ratione *a*, *b*: & inter minimos, medij omnes *c*, *d*: quorum terminorum *a*, *c*, *d*, *b*, rationes deinceps ſunt ſupparticulares; aſſumantur & eorum multipli, do-
27. *h.* nec propoſitorum terminorum denominatores
15. 5. inueniantur, 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*, & 4*a*, 4*c*, 4*d*, 4*b*, eaſdem ſupparticulares habẽtes rationes deinceps. Sumantur denique in ſerie harmonica, termini ab his denominati 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*), &
24. *h.* 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*): quorum rationes deinceps, reciprocè ſunt eędem, & ſuperparticulares.

*Demonſtr.*

55. *h.* Inter 1(4*a*), 1(4*c*), maior eſt hypologarithmus, quàm inter 1(3*a*), 1(3*c*): & inter 1(4*c*), 1(4*d*),

1(4*d*), maior, quàm inter 1(3*c*), 1(3*d*): & inter 1(4*a*), 1(4*b*), maior, quàm inter 1(3*d*), 1(3*b*).

53. *h.* Et ex maioribus hypologarithmis, maior est hypologarithmus compositus, rationis compositæ, inter extremos 1(4*a*), 1(4*b*), quàm ex minoribus, inter extremos 1(3*a*), 1(3*b*). Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 57. Prop. 57.*

Eiusdem rationis, inter eosdem terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior.

*Hypoth.*

Sint in serie harmonica naturali ab vnitate, termini *a*, *b*: & esto *a* prior, quàm *b*.

Dico rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmum hypologarithmo maiorem esse.

*Præpar.*

Inter *a*, *b*, sumantur medij omnes in serie harmonica, quorum summa *c*.

*Demonst.*

*hypoth.* *a*: prior, quàm *b*.

27. *h.* *a*: maior, quàm *b*.

*a*+*c*: maior, quàm *c*+*b*.

*def.22h* *a*+*c*: hyperlogarithmus.

*def.23h* *c*+*b*: hypologarithmus.

Ergo rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmus, est maior hypologarithmo. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 58. Prop. 58.*

EIusdem rationis inter quoscunque terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior.

*Hypoth. comm.*

In serie harmonica naturali ab vnitate, sunto termini proportionales *a* ad *b*, vt *c* ad *d*.

Dico inter *a*, *b* hypologarithmum, hypologarithmo inter *c*, *d*, maiorem esse.

*Hypoth. p. cas.*

Esto *a*, maior, quàm *c*.

*Demonstr.*

14. 5. Quoniam *a*, maior est, quàm *c*; etiam *b*, ma-
54. *h*. ior est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, maior est hyperlo-
58. *h*. garithmus, quàm inter *c*, *d*: sed inter *c*, *d*, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior: ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

*Hypoth. 2. cas.*

Esto *a*, minor, quàm *c*.

*Demonstr.*

14. 5. Quoniam *a*, minor est, quàm *c*; etiam *b* mi-
58. *h*. nor est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, hyperlogarithmus
55. *h*. hypologarithmo est maior: hypologarithmus autem inter *a*, *b*, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

Quare &c.

*Probl. 1. Prop. 59.*

DAta ratione, terminos inuenire cuiuſpiam determinatæ rationis numeroſæ, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hypologarithmus ad vltimum, maior eſt, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*.

Oportet inuenire in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales, vt *c* ad *d*: quos inter hypologarithmus ad vltimum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

*Conſtr.*

Rationis *c* ad *d*, minimi numeri inueniantur *c*, *d*: & eſto *c* minor, quàm *d*; cuius defectus *e*: & inueniatur *f* multiplex ipſius *e*, & maior ad vnitatem, quàm vt *a* ad *b*: & quotuplex eſt *f* ad *e*, totus numerus accipiatur *g*: per quem multiplicentur *c*, *d*, termini, & fiant *gc*, *gd* producti: quibus denominatæ ſumantur vnitates in ſerie harmonica naturali, 1(*gc*), 1(*gd*).

Dico inter 1(*gc*), 1(*gd*) hypologarithmum ad 1(*gd*), maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

*Demonſtr.*

9. *b.* Quoniam *c*, minor eſt, quàm *d*: & *gc*, minor
12. *b.* quàm *gd*: ergo reciprocè 1(*gc*) maior eſt, quàm
*def.* 19. *b* 1(*gd*): & ſinguli medij harmonici inter 1(*gc*), 1-
*p.* 3. (*gd*), ſunt maiores, quàm 1(*gd*): & ſimul omnes

ad

ad 1(*gd*) maiores sunt, quàm vt eorum multitudo ad vnitatem. & componendo hypologarithmus inter 1(*gc*), 1(*gd*), maior est ad 1(*gd*), quàm vt eius multitudo terminorum ad vnitatem.

*p. 3.*

*44. h.* Termini autem serici harmonicę ab vnitate inclusiuè, vsqne ad 1(*gd*) inclusiuè, tot sunt, quotus est *gd*: & vsque ad 1(*gc*) inclusiuè, quotus est, *gc*: & ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè,

*30. h.* tot, quotus est, *gd*---*gc*. Sed *d*---*c*, est *e*: & *gd* ---*gc*, est *ge*: & *g* multiplicans *e*, facit *f*. Ergo termini ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclu-

*def.23h* siuè, tot sunt, quotus est *f*. Sed termini ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè, componunt hypologarithmum inter 1(*gc*), 1(*gd*): ergo multitudo terminorum hypologarithmi inter 1(*gc*),

*constr.* 1(*gd*), est *f*. Sed *f* ad vnitatem maior est, quàm vt *a* ad *b*. Ergo hypologarithmus inter 1(*gc*), 1(*gd*), ad 1(*gd*), maior est, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 2. Prop. 60.*

Data ratione, terminos inuenire cuiuspiam determinatæ rationis numerosæ, in serie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hyperlogarithmus ad primum maior est, quàm in data ratione.

Hy-

*Hypoth.*

ata ratio *a* ad *b*: & sit determinata ratio numero- *d*: & esto *c*, minor, quàm *d*.

›t tet inuenire, in serie harmonica naturali ab vni- rminos proportionales vt *c* ad *d*: quos inter hy- ırithmus ad primum eorum, maior est, quàm vt *a*

*Constr.*

Fiat vt *d* ad *c*, ita *b* ad *e*: & inueniantur termini in serie harmonica naturali ab vnitate, proportionales *f* ad *g*, vt *d* ad *c*; inter quos hypologarithmus, maior sit ad *g*, quàm vt *a* ad *e*.

ɔ inter *f*, *g* hyperlogarithmum, ad *f*, maiorem es- ım vt *a* ad *b*.

*Demonstr.*

Inter *f*, *g* hypologarithmus, ad *g*, maior est, quàm vt *a* ad *e*: *g* ad *f*, est vt *e* ad *b*: ergo inter *f*, *g* hypologarithmus, ad *f*, maior est, quàm vt *a* ad *b*. Sed inter *f*, *g* hyperlogarithmus hypologarithmo est maior; maioremque habet ad *f* rationem: ergo inter *f*, *g* hyperlogarithmus, ad *f*, maior est, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

re &c.

---

*Probl. 3. Prop. 61.*

ˋtis duabus numerosis, & non æquealtis rationibus, vtrisque maioris, vel vtrisque minoris inæquali-

qualitatis: iuuenire in ſerie harmonica naturali, terminos duarum rationum, vt hypologarithmus altioris, maior ſit hyperlogarithmo depreſſioris.

*Hypoth.*

Sint duæ rationes numeroſæ, vtræque maioris, vel vtræque minoris inæqualitatis, *A* altior, *B* depreſſior.

Oportet in ſerie harmonica naturali, terminos inuenire vtrarumque, vt hypologarithmus *A*, ſit maior hyperlogarithmo *B*.

*Conſtr.*

35. 7. Inueniantur *c*, *d*, minimi numeri numeroſæ
35. 7. rationis *A*: quorum *c*, minor, quàm *d*. Item inueniantur *e*, *f*, minimi numeroſæ rationis *B*:
def. 28. h quorum *e*, minor, quàm *f*. Fiat ex *c*, *e* pro-

| A | | | B | |
|---|---|---|---|---|
| c | d | | e | f |
| ce | | cf | g | de |
| cef | eg | cf2 | fg | def |
| 1(ccf) | 1(eg) | | 1(fg) | 1(def) |

9. h. ductus *ce*: & vt *c* ad *d*, ita *ce* ad *de*: & vt *e* ad *f*, ita *ce* ad *cf*. Et quoniam altior eſt *A*, quàm *B*; ideſt, *c* ad *d*, quàm *e* ad *f*; ideſt, *ce* ad *de*, quàm *ce* ad *cf*. & ſunt minoris inæqualitatis.
def. p. 4. ergo *ce* minor eſt ad *de*, quàm ad *cf*. Ergo *cf*,
10. 5. minor eſt, quàm *de*. Sumatur inter *cf*, *de* medius quilibet numerus *g*. & multiplicentur om-
def. 28. h nes *ce*, *cf*, *g*, *de*, communiter per *f*: & ſint

pro-

producti *cef*, *cf2*, *fg*, *def*. necnon multiplicetur *g*, per *e*: & sit productus *eg*. Et quoniã *cef* ad *cf2*, est vt *e* ad *f*: item *eg* ad *fg*, est vt *e* ad *f*: ergo *cef* ad *cf2*, est vt *eg* ad *fg*. Est autem *cf*, minor, quàm *g*: ergo *cf2*, minor est, quàm *fg*: ergo *cef*, minor est, quam *eg*: ergo sunt quatuor numeri, hoc ordine *cef*, *eg*, *fg*, *def*, priores minores posterioribus; à quibus denominatæ vnitates 1(*cef*), 1(*ge*), 1(*fg*), 1(*def*), sunt in serie harmonica naturali ab vnitate, hoc ordine, priores maiores posterioribus. & est 1(*cef*) ad 1(*def*), vt *d* ad *c*; & 1(*eg*) ad 1(*fg*), vt *f* ad *e*.

o hypologarithmum inter terminos 1(*cef*), 1(*def*), esse hyperlogarithmo inter terminos 1(*eg*), 1(*fg*).

*Demonstr.*

Nam hypologarithmus inter terminos 1(*cef*), 1(*def*), ex 1(*eg*), ex 1(*fg*), & ex omnibus intermedijs, alijsque terminis componitur: hyperlogarithmus verò inter 1(*eg*), 1(*fg*), ex 1(*eg*), & ex intermedijs terminis, vsque ad 1(*fg*) exclusiuè, componitur. Ergo hyperlogarithmus inter 1(*cef*), 1(*def*), maior est hyperlogarithmo inter 1(*eg*), 1(*fg*). Quod &c. Quare &c.

---

*Probl.* 4. *Prop.* 62.

Ata qualibet ratione inæqualitatis, inuenire in serie harmonica naturali ab vnitate, terminos determi-

natam habentes rationem inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum propior est æqualitati, quàm in data ratione.

*Hypoth.*

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & sit determinata quædam ratio *C*.

Oportet inuenire terminos in serie harmonica naturali ab vnitate, habentes eamdem *C* rationem; inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum est propior æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

*Constr.*

60. *b.* Esto *a* maior quàm *b*. & inueniantur in serie harmonica naturali ab vnitate, termini, prior *d*, posterior *e*; inter quos hyperlogarithmus ad priorem *d*, maior est, quàm vt *a* ad *a*---*b*.

Dico inter *d*, *e* hyperlogarithmum ad hypologarithmum, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*; maiorem, quàm vt *b* ad *a*.

*Præpar.*

Inter *d*, *e*, assumatur mediorum omnium harmonicorum summa *f*.

*Demonstr.*

*deff.* 22. & 23 *b.* *constr.* Inter *d*, *e* hyperlogarithmus est *d*+*f*; & hypologarithmus *f*+*e*: & est *d*+*f* ad *d*, maior, quàm
3. 3. vt *a* ad *a*---*b*: & per conuersionem rationis, *d*
8. 5. +*f* ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *b*. Sed *d*+*f* ad *f*
13. 5. +*e*, minor est, quàm vt *d*+*f* ad *f*. Ergo *d*+*f* ad

*f*+*e*,

$f-e$, minor est, quàm vt $a$ ad $b$. Ergo inter $d$, $e$ hyperlogarithmus ad hypologarithmum, minor est, quàm vt $a$ ad $b$. Quod &c.

Et est hyperlogarithmus hypologarithmo maior: $b$ autem, minor, quàm $a$. Ergo hyperlogarithmus ad hypologarithmum maior est, quàm vt $b$ ad $a$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 59. Prop. 63.*

SI fuerit prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia, maior: erit secunda, quàm quarta, maior.

*Demonstr.*

1.5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quar-
8.5. tam: contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8.5. minor, quàm quarta: esset prima ad secundam, maior, quàm vt ad quartam: prima autem ad quar-
13.5. tam, maior est quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam, contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta maior. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 60. Prop. 64.*

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia minor:

erit & secunda, quàm quarta, minor.

*Demonstr.*

8. 5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8. 5. maior, quàm quarta: esset prima ad secundam,
8. 5. minor, quàm vt ad quartam: prima autē ad quar-
13. 5. tam, minor est, quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta, minor.

Quare &c.

---

*Theor. 61. Prop. 65.*

Earumdem numerosarum rationum vna tantùm quantitas est logarithmus.

*Hypoth.*

Sunto duæ quantitates inæquales *a*, *b*: & esto *a*, logarithmus rationis *C*.

Dico *b* non esse logarithmum rationis *C*.

*Præpar.*

Sumãtur eiusdem rationis *C*, hyperlogarithmus
62. *b*. *d*, & hypologarithmus *e*, propiores æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

*Demonstr.*

57. *b*. *d*: maior quàm *e*.
Si *a*, maior est, quàm *b*.

*constr.* | $d$; $e$: minor, quàm $a$; $b$.
*def.24h* | $d$: maior, quàm $a$.
*63. h.* | $e$: maior, quàm $b$.
*def.24h* | $b$, non est logarithmus rationis C. Quod &c.
| Si $a$, minor est, quàm $b$.
*constr.* | $e$; $d$: maior, quàm $a$; $b$.
*def.24h* | $e$: minor, quàm $a$.
*64. h.* | $d$: minor, quàm $b$.
*def.24h* | $b$, non est logarithmus rationis C. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor. 62. Prop. 66.*

DEterminatæ numerosæ rationis hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, sunt rationes quasi infinitæ.

*Demonstr.*

*59. h.* Possunt enim inueniri cuiusque determinatę rationis numerosæ termini in serie harmonica naturali ab vnitate, quorum ad vltimum, hypologari-
*60. h.* thmus maior est, quàm in data quacunque ratione: item, quorum ad primum, hyperlogarithmus maior est, quàm in data quacunque ratione. Qua-
*def.p. 3.* re hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ratio quasi est infinita.

---

*Theor. 63. Propos. 67.*

SI trium inæqualium quantitatum, maxima, & minima, fuerint propiores æqualitati, quàm data ratio inæqualitatis: etiam maxima, & media; media, & minima, erunt propiores æqualitati, quàm data eadem ratio.

*Hypoth.*

Sint inæquales quantitates *a*, *b*, *c*; maxima quidem *a*, minima *c*: & sit data ratio inæqualitatis *d* ad *e*; cuius maior terminus *d*, minor *e*: & sit *a* ad *c*, propior æqualitati, quàm *d* ad *e*.

Dico *a*; *b*, & *b*; *c*: propiores æqualitati, quàm *d*; *e*:

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *a*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. |
| *def.* 3.3. | *a*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *a*: maior, quàm *e*; *d*. |
| 8. 5. | *a*; *b*: minor, quàm *a*; *c*. & *b*; *a*: maior, quàm *c*; *a*. |
| 13. 5. | *a*; *b*: minor, quàm *d*; *e*. & *b*; *a*: maior, quàm *e*; *d*. |
| *def.* 3.3. | *a*; *b*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c. |
| 8. 5. | *b*; *c*: minor, quàm *a*; *c*. & *c*; *b*: maior, quàm *c*; *a*. |
| 13. 5. | *b*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *b*: maior, quàm *e*; *d*. |
| *def.* 3.3. | *b*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Probl. 5. Prop. 68.*

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire cuiusdam determinatæ rationis hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in data ratione.

*Hy-*

*Hypoth.*

ata ratio inæqualitatis *a* ad *b*; cuius maior ter-
, minor *b*: & ſit determinata quædam ratio *C*.
rtet inuenire hyperlogarithmos, & hypologari-
d inuicem, & ad logarithmum rationis *C*, propio-
alitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

*Conſtr.*

Inueniantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate duo termini *d*, *e*, habentes eamdem rationem *C*; inter quos hyperlogarithmus *f*, ad hypologarithmum *g*, ſit propior æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Sumanturque minores termini quàm *d*, *e*, eamdem habentes rationem *C*; inter quos eſto hyperlogarithmus *h*; & eſto hypologarithmus *i*: & eiuſdem rationis *C*, eſto logarithmus *k*.

o *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, propiores eſſe æqualitati, quàm in *a* ad *b*.

*Demonſtr.*

*f*: maior eſt, quàm *h*.
*h*: maior, quàm *k*.
*k*: maior, quàm *i*.
*i*: maior, quàm *g*.
*f*; *g*: propior æqualitati, quàm *a*; *b*.
*f*, *h*, *k*, *i*, *g*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Quod &c.

re &c.

Theor. 64. Prop. 69.

EIusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

*Demonstr.*

68. h. Possunt enim inueniri eiusdem rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi, & ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in data qualibet ratione inæqualitatis. Quare eiusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

def. 3. 3.

Theor. 65. Prop. 70.

ÆQuealtarum numerosarum rationum, ęquales sunt logarithmi.

*Demonstr.*

65. h. Earumdem enim numerosarum rationum, vna tantùm quantitas, est logarithmus. Sed æquealtæ, sunt eædem inter se. nam si non essent eędem, cum vel vtraque sit maioris, vel vtraque minoris inęqualitatis; vtrarumque maioris, quę minor esset, vel vtrarumque minoris inæqualitatis, quæ maior esset, propior esset æqualitati: & non essent inter se æquealtæ; contra hypothesim. Ergo etiam æquealtarum rationum, vna tantùm quantitas est logarithmus.

Quare &c.

*Theor. 66. Prop. 71.*

NVmerosarum rationum, altioris, maior est logarithmus, & depressioris, minor.

*Hypoth.*

Sunto numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: & esto ipsius *A*, logarithmus *a*; & ipsius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem esse, quàm *b*.

*Præpar.*

61. b. | Inueniatur *c*, hypologarithmus rationis *A*; & *d*, hyperlogarithmus rationis *B*; vt sit *c*, maior, quàm *d*.

*Demonstr.*

def. 24 b | *a*: maior, quàm *c*.

constr. | *c*: maior, quàm *d*.

def. 24 b | *d*: maior, quàm *b*.

| *a* maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 67. Prop. 72.*

MVltiplicatarum numerosarum rationum hyperlogarithmi sunt quasi æquemultiplices: item hypologarithmi, quasi æquemultiplices.

*Hypoth.*

Sunto rationes numerosæ *A*, *B*: & esto *A*, triplicata ipsius *B*.

Dico hyperlogarithmos *A*, hyperlogarithmorum *B*, quasi triplices esse. item hypologarithmos hypologarithmorum.

*Demonstr.*

53. h. Ex *B*, *B* rationibus deinceps, duplicatæ rationis hyperlogarithmus, est ex hyperlogarithmis vtrarumque *B*, *B* compositus. Et ex *B*, *B*, *B* rationibus deinceps, triplicatæ rationis *A*, hyperlogarithmus, est ex hyperlogarithmis trium *B*, *B*, *B* compositus. item hypologarithmus ex hypologarithmis. Sed rationum *B*, *B*, *B* deinceps, hyperlogarithmi, sunt quasi æquales: item hypologarithmi, quasi æquales. Ergo componendo, rationis ex duabus *B*, *B*, duplicatæ hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum vnius *B*, quasi est duplex: & iterum componendo, rationis *A*, ex tribus *B*, *B*, *B*, triplicatæ hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum vnius *B*, quasi est triplex: item hypologarithmus ad hypologarithmum, quasi est triplex. Quod &c.

69. h.

15. 3.

23. 3.

Quare &c.

---

*Theor. 68. Prop. 73.*

MVltiplicatarum numerosarum rationum, sunt æquemultiplices logarithmi.

*Hypoth.*

Sunto rationes *A*, *B*, numerosæ: & esto *A*, multiplicata ipsius *B*.

Dico logarithmum *A*, logarithmi *B*, totuplicem esse, quotuplicata est *A* ad *B*.

De-

*Demonstr.*

69. b. Hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *A*, sunt quasi æquales: item hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *B*, sunt quasi æquales.
72. b. Sed hyperlogarithmi *A*, ad hyperlogarithmos *B*; & hypologarithmi, ad hypologarithmos, sunt quasi totuplices, quotuplicata est
31. 3. *A* ad *B*. Ergo hyperlogarithmi *A*, ad logari-
65. b. thmum *B*, sunt quasi totuplices. Sunt autem loga-
33. 3. rithmi *A*, & *B*, quantitates determinatæ. Ergo logarithmus *A*, ad logarithmum *B*, totuplex est, quotuplicata est *A* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 69. Prop. 74.*

Rationes numerosæ logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi.

*Hypoth.*

Sunto numerosæ rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

*Præpar.*

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

*Demonſtr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | Rationis $A$, logarithmus eſt $a$. |
| 73. *h.* | Rationis $3A$, logarithmus eſt $3a$. |
| *hypoth.* | Rationis $B$, logarithmus eſt $b$. |
| 73. *h.* | Rationis $4B$, logarithmus eſt $4b$. |
| 71. *h.* | Si $3A$, eſt altior, quàm $4B$; etiam $3a$, eſt maior, |
| 70. *h.* | quàm $4b$: ſi depreſſior; minor: ſi æquealta; æqualis. |
| *def.* 8.4. | $A$ ad $B$, eſt logarithmicè, ſicut $a$ ad $b$. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Probl. 6. Prop. 75.*

DAta ratione, numeroſam depreſſior inuenire.

*Hypoth.*

Eſto data ratio $a$ ad $b$: cuius maior terminus $a$, minor $b$.

Oportet numeroſam inuenire depreſſiorem, quàm $a$ ad $b$.

*Conſtr.*

Eſto $c$, exceſſus $a$ --- $b$: & multiplicetur $c$, donec fiat maior, quàm $b$: & ſit multiplicationis numerus $d$: cui addita vnitas faciat $e$.

Dico $e$ ad $d$, depreſſiorem eſſe, quàm $a$ ad $b$.

*Demonſtr.*

Quoniam $cd$, maior eſt quàm $b$: ergo $cd+c$, maior eſt, quàm $b+c$; ideſt, maior, quàm $a$: & $cd+c$ ad $c$, maior eſt, quàm $a$ ad $c$: ergo per conuerſionem rationis $cd$

$+c$

$+c$ ad *cd*, minor est, quàm *a* ad *b*. Sed *cd*$+c$ ad *cd*, est vt d$+u$ ad *d*: & *e* est *d*$+u$: ergo *e* ad *d* minor est, quàm *a* ad *b*: & est *e* maior, quàm *d*: ergo *e* ad *d*, est depressior, quàm *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 7. Prop. 76.*

Datis duabus rationibus non æquealtis, logarithmicam rationem habentibus: inuenire numerosam rationem, depressiorem altiore datarum, & altiorem depressiore.

*Hypoth.*

*a* *g* *e* *h* *b*
*c* *f* *d*
*l* *i* *k*

Sunto rationes datæ maioris inæqualitatis, *a* ad *b* altior, & *c* ad *d* depressior.

Oportet rationem numerosam inuenire, depressiorem, quàm *a* ad *b*, & altiorem, quàm *c* ad *d*.

*Constr.*

Sumatur inter *a*, *b*, media proportionalis *e*: & inter *c*, *d*, media *f*. Et vt *f* ad *c*, ita fiat *e* ad *g*: & vt *f* ad *d*, ita *e* ad *h*: & erit ex æquali *g* ad *h*, vt *c* ad *d*: eritque *g*, maior, quàm *h*: & erunt *g*, *e*, *h*, tres continuè proportionales: eritque *g* maior, quàm *e*; & *e*, maior, quàm *h*.

Et quoniam sicut *a* ad *b*, duplicata est rationum *a* ad *e*, & *e* ad *b*; sic *g* ad *h*, duplicata est rationum *g* ad *e*, & *e* ad *h*:

*a* *g* *e* *h* *b*
*c* *f* *d*
*l* *i* *k*

18. 4. | *e* ad *h*: permutando erit ficut *a* ad *b*, altior, quàm *g* ad *h*; fic *a* ad *e*, & *e* ad *b*, altior, quàm *g* ad *e*, & *e* ad *h*: funtque rationes maioris inæqualitatis: ergo *a* ad *e*, maior eft, quàm *g* ad *e*: & *a*, maior, quàm *g*. item *e* ad *b*, maior eft, quàm *e* ad *h*: & *h*, maior, quàm *b*.

Duarum quantitatum *h*--*b*, vel *b*, fumatur vna non maior, quàm altera: quæ fit *h*--*b*: cuius æqualiter diuifæ fecundum quemlibet numerum particula fit *i*. & multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *b*: & efto multiplicationis numerus *k*. Deinde multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *g*: & fit multiplicationis numerus *l*.

Dico *l* ad *k*, depreffiorem effe, quàm *a* ad *b*: altiorem, quàm *c* ad *d*.

*Demonftr.*

Maior eft *h*--*b*, quàm *i*: fed *Ki*--*b* non maior: ergo *h*--*b*, maior eft, quàm *Ki*--*b*: & *h*, maior, quàm *Ki*: & eft *Ki* maior, quàm *b*. Deinde *a* ad *e*, eft vt *e* ad *b*: & *e* ad *g*, eft vt *h* ad *e*: ergo ex æquali in perturbata, *a* ad *g*, eft vt *h* ad *b*. & permutando *a* ad *h*, vt *g* ad *b*: & *a*--*g* ad *h*--*b* vt *a* ad *g*: fed *a* maior eft, quàm *g*: ergo *a*--*g*, maior eft, quàm *h*--*b*: fed *h*--*b*, maior eft, quàm *i*: ergo *a*--*g*, maior eft, quàm *i*. fed *li*--*g*, non maior eft, quàm *i*. ergo *a*--*g*, maior eft, quàm *li*--*g*: ergo *a* maior

ior est, quàm *li*. Ergo *li* ad *ki*, vel *l* ad *k* minor est, quàm *a* ad *b*: & sunt maioris inæqualitatis: ergo *l* ad *K* depressior est, quàm *a* ad *b*. Quod &c. Rursum *li* maior est, quàm *g*: & *h* maior est quàm *Ki*. Ergo *li* ad *Ki*, vel *l* ad *K*, maior est, quàm *g* ad *h*, vel quàm *c* ad *d*: & sunt maioris inæqualitatis rationes: ergo *l* ad *K*, altior est, quàm *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl. 8. Prop. 77.*

Data qualibet non numerosa ratione, dataque altera qualibet ratione inęqualitatis: duas numerosas rationes inuenire altiorem & depressiorem, quàm data non numerosa; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum; propiores æqualitati logarithmicæ, quàm sit data altera ratio.

*Hypoth.*

Sit data quælibet ratio non numerosa; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & sit data altera ratio inæqualitatis; cuius maior terminis *c*, minor *d*.

Oportet inuenire duas rationes numerosas, altiorem, quàm *a* ad *b*, & depressiorem, quàm *a* ad *b*; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum: sed vt altior ad depressiorem logarithmicè sit minor, quàm vt *c* ad *d*.

*Constr.*

75. *b*. Inueniatur ratio numerosa *e* ad *f*, depressior, quàm *c* ad *d*. sumaturque numerus *g*, pariter par,

ma-

53. 3. maior quàm *e*: & quotus eſt *g*, ſubtotuplicata rationis *a* ad *b*, ratio inueniatur *h* ad *i*: & inueniatur numeroſa ratio *K* ad *l*, depreſſior, quàm *h* ad *i*: & rationis *K* ad *l*, ſumantur duplicata, triplicata, & deinceps reliquæ multiplicatæ, donec fiat ratio *M*, primò altior, quàm *a* ad *b*: & ſit multiplicationis numeris *m*: qui vnitate multatus, relinquatur *n*: & quotus eſt *n*, totuplicata, rationis *K* ad *l*, fiat ratio *N*.

Dico rationem *N* depreſſiorem eſſe, quàm *a* ad *b*: & *M* ad *N* logarithmicè minorem eſſe, quàm vt *c* ad *d*.

*Demonſtr.*

Si enim ratio *N*, non eſſet depreſſior, quàm *a* ad *b*: eſſet vel æquealta, vel altior. Sed non eſt altior alioquin *M*, non eſſet primò altior, quàm *a* ad *b*. neque eſt æquealta, alioquin eſſet eadem, atque *a* ad *b*: & eſſet etiam *a* ad *b* ratio numeroſa, contra hypotheſim. Ergo ratio *N*, eſt depreſſior, quàm *a* ad *b*.

Deinde quoniam *K* ad *l*, eſt depreſſior, quàm *h* ad *i*: & *h* ad *i*, totuplicata quotus eſt *g*, eſt *a* ad *b*: ergo *K* ad *l*, totuplicata quotus eſt *g*, eſt
19. 4. depreſſior, quàm *a* ad *b*. ſed *K* ad *l*, totuplicata
5. 3. & def. 5. 4. quotus eſt *m*, eſt altior, quàm *a* ad *b*. Ergo numerus *m*, maior eſt, quàm *g*: ſed *g*, eſt maior, quàm *e*: ergo *m*, multò eſt maior, quàm *e*: & eſt *m* ad vnitatem, maior, quàm *e* ad eamdem vnitatem: & per conuerſionem rationis, *m* ad *n*, minor

constr. nor est, quàm *e* ad *f*. Sed vt *m* ad *n*, ita logari-
17. 4. thmicè est ratio *M* ad rationem *N*. ergo ratio *M* ad rationem *N*, minor est logarithmicè, quàm vt *e* ad *f*: & multò minor, quàm vt *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 70. Prop. 78.*

NOn numerosæ rationis vna tantùm quantitas est logarithmus.

*Hypoth. p.*

Esto ratio *a* ad *b* non numerosa: sintque duæ quantitates inæquales, *c* maior, *d* minor: quarum vna *c*, esto logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *d*, non esse logarithmum rationis *a* ad *b*.

*Præpar.*

77. *b*. Inueniantur duæ rationes numerosæ, *E* altior, quàm *a* ad *b*, & *F* depressior: vt sit *E* ad *F*, logarithmicè sicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *d*. & assignentur ipsarum *E*, *F* rationum, logarithmi *e*, *f*.

*Demonstr.*

præpar. *E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *c*; *d*.
74. *b*. *E*; *F*: *e*; *f*.
17. 4. *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
def. 34 *b* *e*: maior, quàm *c*.
63. *b*. *f*: maior, quàm *d*.
def. 34 *b* *d*, non est logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

*Hypoth.* 2.

Esto *d*, logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *c*, non esse logarithmum rationis *a* ad *b*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *sup.* | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*. |
| 2.3. | *f*; *e*: maior, quàm *d*; *c*. |
| *def.34b* | *f*: minor, quàm *d*. |
| 64. *b*. | *e*: minor, quàm *c*. |
| *def.34b* | *c*, non est logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Theor.* 71. *Prop.* 79.

Non numerosarum rationum, altioris maior est logarithmus, & depressioris minor.

*Hypoth.*

Sunto non numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: & esto ipsius *A*, logarithmus *a*; & ipsius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem esse, quàm *b*.

*Præpar.*

76. *b*. Inter *A*, *B* rationes, inueniatur numerosa ratio *C*, depressior, quàm *A*, altior quàm *B*: cuius logarithmus esto *c*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *ef.34b* | *a*: maior est, quàm *c*. |
| *def.34b* | *c*: maior, quàm *b*. |
| | *a*: maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c. |

---

Theo-

*Theor. 72. Prop. 80.*

MVltiplicatarum rationum, sunt æquemultiplices logarithmi.

*Hypoth.*

Esto ratio *A* rationis *B* triplicata: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *a* ad *b* triplicem esse.

*Hypothesis contradictoria in primo casu.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *c* | *d* | | | |
| *E* | *A* | *F* | | *G* | *B* | *H* |
| *e* | *a* | *f* | | *g* | *b* | *h* |

Esto si fieri potest *a* maior, quàm triplex ad *b*.

*Præpar.*

76. *b.* Inter rationem *a* ad *b* altiorem, & rationem triplicem depressiorem, ratio numerosa sumatur *c* ad
77. *b.* *d*, depressior, quàm *a* ad *b*, altior, quàm triplex, & vt *a*, sit maior, quàm *c*; & *d*, maior, quàm *b*. Et inueniantur duæ numerosæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depressior: vt sit *E* ad *F* logarithmicè sicut numerus ad numerũ, & minor, quàm
77. *b.* vt *a* ad *c*. Item inueniantur duę numerosæ rationes, *G* altior quàm *B*, & *H* depressior; vt sit *G* ad *H* logarithmicè sicut numerus ad numerum, & minor quàm vt *d* ad *b*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

c d

E A F G B H

e a f g l h

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *præpar.* | *A*: altior, quàm *F*. |
| 14. 4. | *A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *B*. |
| *præpar.* | *G*: altior, quàm *B*. |
| 14. 4. | *F*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*. |
| 17. 4. | *A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*. |
| *hypoth.* | *A*; *B*: triplicata. |
| 17. 4. | *F*; *G*: depressior, quàm triplicata. |
| 74. *h.* | *F*; *G*: logarithmicè *f*; *g*. |
| 17. 4. | *f*; *g*: minor, quàm triplex. |
| *præpar.* | *E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *a*; *c*. |
| 74. *h.* | *E*; *F*: logarithmicè *e*; *f*. |
| 17. 4. | *e*; *f*: minor, quàm *a*; *c*. |
| *def.* 34*h* | *e*: maior, quàm *a*. |
| 63. *h.* | *f*: maior, quàm *c*. |
| *præpar.* | *G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *d*; *b*. |
| 74. *h.* | *g*; *h*: logarithmicè *G*; *H*. |
| 17. 4. | *g*; *h*: minor, quàm *d*; *b*. |
| 2. 3. | *h*; *g*: maior, quàm *b*; *d*. |
| *def* 32*h* | *h*: minor, quàm *b*. |
| 64. *h.* | *g*: minor, quàm *d*. |
| 67. *h.* | *f*; *g*: maior, quàm *c*; *d*. |
| *præpar.* | *c*; *d*: maior, quàm triplex. |

*f*; *g*:

13. 5. | f; g: maior, quàm triplex. } quæ sunt contradi-
sup. | f; g: minor, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non est maior, quàm triplex.

*Hypoth. contrad. in secundo casu.*

*c* *d*

*E A F G B H*

*e a f g b h*

Esto si fieri potest *a* minor, quàm triplex ad *b*.

*Præpar.*

76. b. | Inter rationem *a* ad *b* depressiorem, & rationem triplicem altiorem ratio numerosa sumatur *c* ad *d*, depressior, quàm triplex; altior, quàm *a* ad *b*: & vt *c* sit maior quàm *a*: & *b* maior, quàm *d*.
77. b. | Et inueniantur duæ numerosæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depressior; vt sit *E* ad *F* logarithmicè, sicut numerus ad numerum, & minor,
77. b. | quàm vt *c* ad *a*. Item inueniantur duæ numerosæ rationes; *G* altior, quàm *B*; & *H*, depressior; vt sit *G* ad *H*, logarithmicè sicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *b* ad *d*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

*Demonstr.*

præpar. | *E*: altior, quàm *A*.
14. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *H*.
præpar. | *B*: altior, quàm *H*.
14. 4. | *A*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.
17. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.

*A*; *B*:

*c* *d*

*E A F G B H*

*e a f g b h*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | *A*; *B*: triplicata. |
| 17. 4. | *E*; *H*: maior, quàm triplicata. |
| 74. *h.* | *e*; *h*: logarithmicè vt *E*; *H*. |
| 17. 4. | *e*; *h*: maior, quàm triplex. |
| *præpar.* | *E*; *F*: minor, quàm *c*; *a*. |
| 74. *h.* | *E*; *F*: logarithmicè vt *e*; *f*. |
| 17. 4. | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *a*. |
| 2. 3. | *f*; *e*: maior, quàm *a*; *c*. |
| *def.* 34*h* | *f*: minor, quàm *a*. |
| 64. *h.* | *e*: minor, quàm *c*. |
| *præpar.* | *G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *b*; *d*. |
| 74. *h.* | *g*; *h*: logarithmicè, vt *G*; *H*. |
| 17. 4. | *g*; *h*: minor, quàm *b*; *d*. |
| *def.* 32*b* | *g*: maior, quàm *b*. |
| 63. *h.* | *h*: maior, quàm *d*. |
| 67. *h.* | *e*; *h*: minor, quàm *c*; *d*. |
| *præpar.* | *c*; *d*: minor, quàm triplex. |
| 13. 5. | *e*; *h*: minor, quàm triplex. } quæ ſunt contradi- |
| *ſup.* | *e*; *h*: maior, quàm triplex. } ctoria. |

Ergo *a* ad *b*, non eſt minor, quàm triplex.

Ergo *a* ad *b* eſt triplex. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theo-*

*Theor.* 73. *Prop.* 81.

OMnifariam rationes, logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi. *Hypoth.*

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

Sunto rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

*Præpar.*

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | Rationis *A*, logarithmus est *a*.
80. *h.* | Rationis 3*A*, logarithmus est 3*a*.
*hypoth.* | Rationis *B*, logarithmus est *b*.
80. *h.* | Rationis 4*B*, logarithmus est 4*b*.
*def.*34*h* | Si 3*A*, est altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, est maior,
79. *h.* | quàm 4*b*: si depressior; minor: si æquealta; æqualis.
*def.*8.4. | *A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 74. *Prop.* 82.

DVarum quarumlibet numerosarum rationum, hyperlogarithmus vnius ad hypologarithmum alterius, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

*De-*

*Demonſtr.*

def.24h Eſt enim hyperlogarithmus vnius, eiuſdem logarithmo maior: & eſt hypologarithmus alterius,
8. 5. minor eiuſdem logarithmo. Ergo hyperlogarithmus ad logarithmum vnius, maior eſt, quàm vt
p. 3. hypologarithmus ad logarithmum alterius. Quare permutando, vnius hyperlogarithmus ad hypologarithmum alterius, maior eſt, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

---

*Probl. 9. Prop.* 83.

DVarum datarum non æquealtarum numeroſarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos depreſſioris, inter quos ad hyperlogarithmum, maior ſit hyperlogarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

*Hypoth.*

Sint datæ duæ non æquealtæ numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *A*, dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hyperlogarithmum, maior eſt hyperlogarithmus inter *c*, *d*; quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Conſtr.*

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet eiuſdem rationis *A* terminos
54. b. minores, quàm *c*, *d*, ſumatur alius minor hyper-
61. b. logarithmus *f*: & inueniantur termini *g*, *h*, in ratione

tione *B*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *K*, propior sit æqualitati, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i* maiorem esse, quàm vt logarithmus rationis *A*, ad logarithmum rationis *B*.

*Præpar.*

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *def.24b* | *f*: maior est, quàm *a*. |
| 8. 5. | *e*; *a*: maior, quàm *e*; *f*. |
| *constr.* | *e*; *f*: maior, quàm *i*; *k*. |
| *def.24b.* | *b*: maior, quàm *k*. |
| 8. 5. | *i*; *k*: maior, quàm *i*; *b*. |
| 13. 5. | *e*; *a*: maior, quàm *i*; *b*. |
| *p.* 3. | *e*; *i*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c. |

Quare &c.

---

*Probl.* 10. *Prop.* 84.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depressioris, minor sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

*Hypoth.*

Sint datæ duæ non æquealtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hy-

perlogarithmus, ad hyperlogarithmum inter *c*, *d* minor est, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Constr.*

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet minores terminos, quàm *c*, *d*,
54. *h.* sumatur eiusdem rationis *B* alius minor hyper-
62. *h.* logarithmus *f*: rationis autem *A*, inueniantur termini, *g*, *h*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *k*, minor sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, minorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Præpar.*

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

*Demonstr.*

def.24h | *a*: maior est, quàm *K*.
8. 5. | *i*; *a*: minor, quàm *i*; *K*.
constr. | *i*; *K*: minor, quàm *e*; *f*.
def.24h | *b*: minor, quàm *f*.
8. 5. | *e*; *f*: minor, quàm *e*; *b*.
13. 5. | *i*; *a*: minor, quàm *e*; *b*.
p. 3. | *i*; *e*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Probl.* 11. *Prop.* 85.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos

nos depreſſioris, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

*Hypoth.*

Sint datæ duæ non æqucaltæ rationes numeroſæ, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *A* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus inter *c*, *d*, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Conſtr.*

Sumatur inter *c*, *d*, hypologarithmus *e*: & inter alios terminos eiuſdem rationis *A*, minores
56. *b.* quàm *c*, *d*, ſumatur alius maior hypologarithmus
62. *b.* *f*: & inueniantur in ratione *B*, termini *g*, *h*; inter quos hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *k* maior ſit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i*, minorem eſſe, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Præpar.*

Eſto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

*Demonſtr.*

*conſtr.* | *e*; *f*: minor, quàm *i*; *K*.
*p.* 3. | *e*; *i*: minor, quàm *f*; *K*.
*def.* 24*b* | *K*: maior, quàm *b*.
8. 5. | *f*; *K*: minor, quàm *f*; *b*.
*def.* 24*b* | *a*: maior, quàm *f*.

8.5. | f; b: minor, quàm a; b.
13.5. | e; i: minor, quàm a; b. Quod &c.
Quare &c.

---

*Probl.* 12. *Prop.* 86.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum depressioris, maior sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

*Hypoth.*

Sint datæ duæ non æqualtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum inter *c*, *d*, maior est, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Constr.*

| Sumatur inter *c*, *d*, hyploogarithmus *e*: & inter alios minores terminos, eiusdem rationis *B*,
56. b. | sumatur alius maior hypologarithmus *f*: & rationis *A*,
62. b. | inueniantur termini *g*, *h*, quos inter hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *K* maior sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, maiorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

*Præpar.*

Esto rationis *A*, logarithmus *a*: & rationis *B* logarithmus *b*.

De-

*Demonstr.*

*constr.* | i; K: maior est, quàm e; f.
*p. 3.* | i; e: maior, quàm K; f.
*def. 24h* | b: maior, quàm f.
8. 5. | K; f: maior, quàm K; b.
*def. 24h* | K: maior, quàm a.
8. 5. | K; b: maior, quàm a; b.
13. 5. | i; e: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 75. Prop. 87.*

ARithmeticè dispositorum terminorum ratio, quàm habent bini minores ad inuicem, altior est ratione, quàm habent bini maiores.

*Hypoth.*

| Sint arithmeticè dispositę quantitates *a, b, c, d*:
*4. h.* | & sit *a* minor, quàm *c*. vnde quoniam permutando
*def. 5. b.* | do *a, c, b, d*, sunt arithmeticè dispositæ, etiam
| *b* est minor, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a, b* ad inuicem, altiores esse rationibus *c, d* ad inuicem.

*Præpar.*

Quoniam *a, b* sunt inæquales; esto *a* minor, quàm *b*: & sit defectus *e*.

*Demonstr.*

*sup.* | b: minor, quàm d.
8. 5. | b; e: minor, quàm d; e.

3. 3. | $b; a$: maior, quàm $d; c$.
hypoth. | $b$: maior, quàm $a$. & $d$: maior, quàm $c$.
def.p.4. | $b; a$: altior, quàm $d; c$. Quod &c.
2. 3. | $a; b$: minor, quàm $c; d$.
hypoth. | $a$: minor, quàm $b$. & $c$: minor, quàm $d$.
def.p.4. | $a; b$: altior, quàm $c; d$. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 76. *Prop.* 88.

HArmonicè dispositum terminorum ratio, quàm habent bini maiores ad inuicem, altior est ratione, quàm habent bini minores.

*Hypoth.*

Sint harmonicè dispositæ quantitates $a$, $b$, $c$, $d$:
34. b. | & sit $a$ maior, quàm $c$. vnde quoniam permutando
def.13b | $a$, $c$, $b$, $d$, sunt harmonicè dispositæ, etiam $b$, est maior, quàm $d$.

Dico rationes terminorum $a$, $b$ ad inuicem, altiores esse rationibus $c$, $d$ ad inuicem.

*Præpar.*

Sumatur vna quælibet quantitas $e$: & fiat
$a; e: e; f$.
$b; e: e; g$.
$c; e: e; h$.
$d; e: e; i$.

De-

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 33. *h.* | *f, g, g, i* sunt arithmeticè ordinate. |
| *constr.* | *c; e: e; h. e; a: f; e.* |
| *p. p.* | *c; a: f; h.* |
| | *c*: minor, quàm *a.* & *f*: minor, quàm *h.* |
| *def.5.h.* | *g*: minor, quàm *i.* |
| 87. *h.* | *f; g*: altior, quàm *h; i.* & *g; f*: altior, quàm *i; h.* |
| *sup.* | *f; g: b; a.* & *g; f: a; b.* |
| *sup.* | *h; i: d; c.* & *i; h: c; d.* |
| | *b; a*: altior, quàm *d; c.* & *a; b*: altior, quàm *c; d.* Quod &c. Quare &c. |

---

*Theor.* 77. *Prop.* 89.

SI fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; sitque maior proportio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundę, ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ, ad tertiam: & sic deinceps: habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: & multò maiorem, quàm omnes priores, relictis duabus primis, ad omnes posteriores, relictis duabus primis: & sic deinceps etiam maiorem, quàm vltima, ad vltimam: sed minorem, quàm omnes priores, relicta vltima, ad omnes posteriores, relicta etiam vltima: & multò minorem, quàm omnes priores, relictis duabus vltimis, ad omnes posteriores, relictis pariter duabus vltimis: & sic deinceps etiam minorem, quàm prima, ad primam.

*Hy-*

*Hypoth.*

| | |
|---|---|
| $a$ | $e$ |
| $b$ | $f$ |
| $c$ | $g$ |
| $d$ | $h$ |

$a; e$: maior, quàm $b; f$.
$b; f$: maior, quàm $c; g$.
$c; g$: maior, quàm $d; h$.

Dico $a+b+c+d; e+f+g+h$: maiorem esse, quàm $b+c+d; f+g+h$.

Et $b+c+d; f+g+h$: maiorem, quàm $c+d; g+h$.

Et $c+d; g+h$: maiorem, quàm $d; h$.

Dico etiam $a+b+c+d; e+f+g+h$: minorem esse, quàm $a+b+c; e+f+g$.

Et $a+b+c; e+f+g$: minorem, quàm $a+b, e+f$.

Et $a+b; e+f$: minorem, quàm $a; e$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| hypoth. | $c; g$: maior, quàm $d; h$. |
| p. 3. | $c; d$: maior, quàm $g; h$. |
| p. 3. | $c+d; d$: maior, quàm $g+h; h$. |
| p. 3. | $c+d$: $g+h$: maior, quàm $d; h$. Quod &c. |
| 3. 3. | $c+d; c$: minor, quàm $g+h; g$. |
| 2. 3. | $c; c+d$: maior, quàm $g; g+h$. |
| p. 3. | $c; g$: maior, quàm $c+d; g+h$. |
| hypoth. | $b; f$: maior, quàm $c; g$. |
| 13. 5. | $b; f$: maior, quàm $c+d; g+h$. |
| p. 3. | $b; c+d$: maior, quàm $f; g+h$. |

$b+c$

$b+c+d$; $c+d$: maior, quàm $f+g+h$; $g+h$.

$b+c+d$; $f+g+h$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. Quod &c.

$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maior, quàm $b+c+d$; $f+g+h$. Quod &c.

$a$; $e$: maior, quàm $b$; $f$.

$a$; $b$: maior, quàm $e$; $f$.

$a+b$; $b$: maior, quàm $e+f$; $f$.

$a+b$; $a$: minor, quàm $e+f$; $e$.

$a+b$; $e+f$: minor, quàm $a$; $e$. Quod &c.

$a+b$; $b$: maior, quàm $e+f$; $f$.

$a+b$; $e+f$: maior, quàm $b$; $f$.

$b$; $f$: maior, quàm $c$; $g$.

$a+b$; $e+f$: maior, quàm $c$; $g$.

$a+b$; $c$: maior, quàm $e+f$; $g$.

$a+b+c$; $c$: maior, quàm $e+f+g$; $g$.

$a+b+c$; $a+b$: minor, quàm $e+f+g$; $e+f$.

$a+b+c$; $e+f+g$: minor, quàm $a+b$; $e+f$. Quod &c.

$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minor, quàm $a+b+c$; $e+f+g$. Quod &c.

re &c.

---

*Theor. 78. Prop. 90.*

:rie harmonica naturali ab vnitate, terminorum armonicè dispositorum, altioris rationis maior ıs, ad maiorem depressioris, maior est, quàm vt hyarithmus, ad hyperlogarithmum: & hyperlogari-

 thmus,

thmus, ad hyperlogarithmum, maior, quàm vt hypologarithmus, ad hypologarithmum: & hypologarithmus, ad hypologarithmum maior, quàm vt minor terminus, ad minorem.

*Hypoth.*

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, termini harmonicè dispositi *a*, *b*, *c*, *d*, quorum altior sit ratio *a* ad *b*, quàm *c* ad *d*. Sitque *a*, maior, quàm *b*: ideoque & *c*, maior, quàm *d*.
def.13b

Quoniam *a* ad *b*, altior est, quàm *c* ad *d*: oportet *a*, maiorem esse, quàm *c*; & *b*, quàm *d*. alioquin permutando, dispositorum harmonicè *a*, *c*,
34. b.
*b*, *d*, esset *c* maior, quàm *a*; ideoque & *d* maior,
def.13.b
quàm *b*; & *c* ad *d*, altior ratio, quàm *a* ad *b*,
88. b.
*contra hypoth.*

Deinde quoniam *a*, *b*, *c*, *d*, sunt in serie harmonica naturali ab vnitate, harmonicè dispositi;
27. b. sunt denominati à numeris arithmeticè dispositis:
26. b. quorum denominator *a*, reciprocè minor est denominatore *b*, necnon reciprocè minor denominatore *c*. & quot sunt numeri omnes medij inter denominatores *a*, *b*; totidem sunt inter denominatores *c*, *d*: totidemque in serie harmonica sunt inter *a*, *b*; totidemque etiam inter *c*, *d*.
24. b. def.5.b. 27. b.

Sint ergo inter *a*, *b* termini *e*, *f*: & inter *c*, *d*, totidem termini *g*, *h*: eritque *a*+*e*+*f*, hyperlogarithmus rationis *a*, ad *b*; & *e*+*f*+*b*, hypologari-
def.22b def.23b

gari-

garithmus eiusdem rationis, inter eosdem terminos $a$, $b$. erit quoque $c+g+h$, hyperlogarithmus rationis $c$ ad $d$; & $g+h+d$, eiusdem hypologarithmus inter eosdem terminos $c$, $d$.

Dico $a$ ad $c$, maiorem esse, quàm $a+e+f$ ad $c+g+h$:
Et $a+e+f$ ad $c+g+h$, maiorem, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$.

Et $e+f+b$ ad $g+h+d$, maiorem, quàm $b$ ad $d$.

*Demonstr.*

*hypoth.* Quoniam $a$, $e$, $f$, $b$, necnon $c$, $g$, $h$, $d$, sunt harmonicè ordinati, in serie harmonica naturali
*27. b.* ab vnitate: ergo eorum denominatores, sunt arithmeticè ordinati, in serie arithmetica naturali ab
*sup.* vnitate: totidemque sunt $a$, $e$, $f$, $b$; quot $c$, $g$, $h$,
*def.8.b.* $d$: ergo denominatores $a$, $e$, $f$, $b$; sunt similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores $c$, $g$,
*16. b.* $h$, $d$: ergo etiam $a$, $e$, $f$, $b$ sunt similiter harmoni-
*def.16b* cè dispositi, atque $c$, $g$, $h$, $d$: ergo $a$, $e$, $c$, $g$ sunt
*34. b.* harmonicè dispositi: ergo permutando $a$, $c$, $e$, $g$, sunt harmonicè dispositi. Similiter ostendetur, quòd $e$, $g$, $f$, $h$ sunt harmonicè dispositi: necnon $f$, $h$, $b$, $d$.

*def.19b* Rursum quoniam $a$, $e$, $f$, $b$ sunt harmonicè ordinati, & est $a$ maior, quàm $b$: ergo $a$ maior, est quàm $e$; & $e$, maior, quàm $f$: & $f$, quàm $b$: item
*sup.* $c$, maior est quàm $g$; $g$, quàm $h$; $h$, quàm $d$. Et
*hypoth.* quoniam $a$, $c$, $e$, $g$ sunt harmonicè dispositi, & est

def.13.h | *a*, maior, quàm *c*; ergo & *e*, maior est, quàm *g*;
82. h. | item *f*, quàm *h*; & *b*, quàm *d*. & est *a* ad *e* ratio
def.p.4. | altior, ideoque maior, quàm *e* ad *g*; & *e* ad *g*, altior, & maior, quàm *f* ad *h*; & *f* ad *h*, altior, & maior, quàm *b* ad *d*.

83. h. | Ergo *a* ad *c* maior est, quàm vt $a+e+f$ ad $c+g+h$. Quod &c. Et est $a+e+f$ ad $c+g+h$ maior, quàm $e+f$ ad $g+h$: & $e+f$ ad $g+h$ maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$: ergo $a+e+f$ ad $c+g+h$, est maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$. Quod &c. Et est $e+f+b$ ad $g+h+d$, maior, quàm *b* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 79. Prop. 91.*

SI quatuor quantitatum prima ad secundam maior fuerit, quàm tertia ad quartam: productus extremarum, maior est producto mediarum.

*Hypoth.*

*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.

Dico *ad*: maiorem esse, quàm *bc*.

*Præpar.*

Fiat productus *bd*.

*Demonstr.*

9. h. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. h. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
hypoth. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.

*ad*;

13. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
10. 5. | *ad*: maior, quàm *bc*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor. 80. Prop. 92.*

SI quatuor quantitatum productus extremarum maior fuerit producto mediarum: erit prima ad secundam maior, quàm vt tertia ad quartam.

*Hypoth.*

Sunt quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: & est *ad* maior, quàm *bc*.

Dico *a*; *b*; maiorem esse, quàm *c*; *d*.

*Præpar.*

Assumatur productus *bd*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | *ad*: maior, quàm *bc*.
8. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
9. *h*. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. *h*. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor. 81. Prop. 93.*

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam: fuerit autem & tertia ad quartam maior, quàm vt quinta ad sextam: item quinta ad sextam maior fuerit, quàm vt septima ad octauam: erit composita prima

cum

cum tertia, ad compositam secundam cum quarta, maior, quàm vt composita quinta cum septima, ad compositam sextam cum octaua.

*Hypoth.*

| | |
|---|---|
| *a* | *b* |
| *c* | *d* |
| *e* | *f* |
| *g* | *h* |

*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
*e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.

Dico $a+c$; $b+d$: maiorem, quàm $e+g$; $f+h$.

*Præpar.*

Fiant producti *af, ah, cf, ch, be, bg, de, dg*.

*Demonstr.*

29. *h.*
$af+ah$: productus *a* per $f+h$.
$cf+ch$: productus *c* per $f+h$.
$af+ah+cf+ch$: productus $a+c$ per $f+h$.
$be+bg$: productus *b*, per $e+g$.
$de+dg$: productus *d*, per $e+g$.
$be+bg+de+dg$, productus $b+d$, per $e+g$.

*hypoth.* | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*hypoth.* | *c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *e*; *f*.
*hypoth.* | *e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *g*; *h*.

*af*:

af: maior, quàm be.
ah: maior, quàm bg.
cf: maior, quàm de.
ch: maior, quàm dg.
af+ah+cf+ch: maior, quàm be+bg+de+dg.
a+c; b+d: maior, quàm e+g; f+h. Quod &c.
ıre &c.

---

*Theor.* 82. *Prop.* 94.

ıerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quaor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eobmultipli: inter ſimplos terminos altioris rationis ogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, ːm habebit rationem, quàm inter ſubmultiplos.hyırithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimːpreſſioris, minorem habebit, quàm inter ſubmul-

*Hypoth.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ı(3) | | 1(4) | | 1(5) | | 1(6) |
| ı(6) | 1(7) | 1(8) | 1(9) | 1(10) | 1(11) | 1(12) |
| 7) | | 1(8) | | 1(9) | | 1(10) |
| 4) | 1(15) | 1(16) | 1(17) | 1(18) | 1(19) | 1(20) |

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10): quorum 1(3), maior, quàm 1(6): ideo-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(3) | | 1(4) | | 1(5) | | 1(6) |
| 1(6) | 1(7) | 1(8) | 1(9) | 1(10) | 1(11) | 1(12) |
| 1(7) | | 1(8) | | 1(9) | | 1(10) |
| 1(14) | 1(15) | 1(16) | 1(17) | 1(18) | 1(19) | 1(20) |

def.13 b ideoq; & 1(7), maior, quàm 1(10). & esto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10: ideo-
def p.4. que etiam maior. sint autem & istorum æque-
36. b. submultipli, 1(6), 1(12), 1(14), 1(20), pa-
15. 5. riter harmonicè dispositi, & æquè cum prædictis proportionales. Sumantur etiam inter 1(3), 1(6) medij omnes harmonici 1(4), 1(5): & inter 1(7), 1(10), medij omnes 1(8) 1(9); quorum æquesubmultipli 1(8), 1(10), 1(16), 1(18).
def.16 b Constat quod sicut 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), &
def.19 b similiter 1(7), 1(8), 1(9), 1(10) harmonicè sunt ordinati, sic 1(6), 1(8), 1(10), 1(12), &
15.5. similiter 1(14), 1(16), 1(18), 1(20) sunt harmonicè ordinati, & æquè cum prædictis proportionales. Deinde inter 1(6), 1(12), & inter 1(14), 1(20) sumantur omnes reliqui medij harmonici 1(7), 1(9), 1(11), & 1(15), 1(17), 1(19).

Dico primò 1(3)+1(4)+1(5) ad 1(7)+1(8)+1(9) maiorem esse, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) ad 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19).

De-

*Demonstr.*

1(3); 1(7): 1(6); 1(14).

1(6); 1(14): maior, quàm 1(7); 1(15).

1(6); 1(14): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).

1(3); 1(7): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).

Similiter demonstrabitur.

1(4); 1(8): maior, quàm 1(8)+1(9); 1(16) +1(17). Et

1(5); 1(9): maior, quàm 1(10)+1(11); 1(18) +1(19).

1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(8); 1(16).

1(8); 1(16): 1(4); 1(8).

1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(4); 1(8).

Similiter demonstrabitur.

1(8)+1(9); 1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9). Et

1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9).

1(3)+1(4); 1(7)+1(8): maior, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16) +1(17).

Similiter demonstrabitur.

1(3)+1(4)+1(5); 1(7)+1(8)+1(9): maior,

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

---

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14) +1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19). Quod &c.

Dico secundò 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10): maiorem esse, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) +1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20).

*Demonstr.*

1(7)+1(8); 1(15)+1(16): maior, quàm 1(4); 1(8).
89. h. 1(4); 1(8): maior, quàm 1(9)+1(10); 1(17) +1(18).
1(9)+1(10); 1(17)+1(18): maior, quàm 1(5); 1(9).

93. h. 1(7)+1(8)+1(9)+1(10); 1(15)+1(16)+1(17) +1(18): maior, quã 1(4)+1(5); 1(8)+1(9).

89. h. 1(4)+1(5); 1(8)+1(9): maior, quàm 1(11) +1(12); 1(19)+1(20).

89. h. 1(11)+1(12); 1(19)+1(20): maior, quàm 1(6); 1(10).

93. h. 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): maior, quã 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10).

Quod

Quod è conuerso est demonstrandum.

Quare &c.

---

*Theor.* 83. *Prop.* 95.

SI fuerint eiusdem rationis duo hyperlogarithmi, alter ex paucioribus, alter ex terminis vno pluribus; & submultiplicati fuerint vtrorumque termini, per alterius multitudinem terminorum: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, primi sunt ęquales; & reliqui deinceps sunt minores, hoc ordine; secundus eius, qui ex pluribus; & secundus eius, qui ex paucioribus; & tertius eius, qui ex pluribus; & tertius eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps. Quod si fuerint hypologarithmi: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, vltimi sunt æquales; & reliqui deinceps sunt maiores, hoc ordine; penultimus eius, qui ex pluribus; & penultimus eius, qui ex paucioribus; & tritultimus eius, qui ex pluribus; & tritultimus eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps.

*Hypoth.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(*a*) | | 2(*b*) | 1(*c*) |
| 1(*d*) | 1(*e*) | 1(*f*) | 1(*g*) |
| 1(3*a*) | | 1(3*b*) | 1(3*c*) |
| 1(2*d*) | 1(2*e*) | 1(2*f*) | 1(2*g*) |

Sint earumdem rationum 1(*a*), ad 1(*c*), & 1(*d*) ad 1(*g*) duo hyperlogarithmi; vnus ex duobus terminis 1(*a*), 1(*b*);

3. 3. | *b*; *a*: maior, quàm *d*; *c*.
*hypoth.* | *b*: maior, quàm *a*. & *d*: maior, quàm *c*.
*def.p.*4. | *b*; *a*: altior, quàm *d*; *c*. Quod &c.
2. 3. | *a*; *b*: minor, quàm *c*; *d*.
*hypoth.* | *a*: minor, quàm *b*. & *c*: minor, quàm *d*.
*def.p.*4. | *a*; *b*: altior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor.* 76. *Prop.* 88.

HArmonicè diſpoſitum terminorum ratio, quàm habent bini maiores ad inuicem, altior eſt ratione, quàm habent bini minores.

*Hypoth.*

| Sint harmonicè diſpoſitæ quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
34. *b.* | & ſit *a* maior, quàm *c*. vnde quoniam permutando
*def.*13*b* | *a*, *c*, *b*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ, etiam *b*, eſt
| maior, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores eſſe rationibus *c*, *d* ad inuicem.

*Præpar.*

Sumatur vna quælibet quantitas *e*: & fiat

*a*; *e*: *e*; *f*.
*b*; *e*: *e*; *g*.
*c*; *e*: *e*; *h*.
*d*; *e*: *e*; *i*.

*De-*

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 33. *h.* | *f, g, g, i* sunt arithmeticè ordinate. |
| *constr.* | *c; e: e; h. e; a: f; e.* |
| *p. p.* | *c; a: f; h.* |
| | *c:* minor, quàm *a.* & *f:* minor, quàm *h.* |
| *def.5.h.* | *g:* minor, quàm *i.* |
| 87. *h.* | *f; g:* altior, quàm *h; i.* & *g; f:* altior, quàm *i; h.* |
| *sup.* | *f; g: b; a.* & *g; f: a; b.* |
| *sup.* | *h; i: d; c.* & *i; h: c; d.* |
| | *b; a:* altior, quàm *d; c.* & *a; b:* altior, quàm *c; d.* Quod &c. Quare &c. |

---

*Theor. 77. Prop. 89.*

SI fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; sitque maior proportio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundę, ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ, ad tertiam: & sic deinceps: habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: & multò maiorem, quàm omnes priores, relictis duabus primis, ad omnes posteriores, relictis duabus primis: & sic deinceps etiam maiorem, quàm vltima, ad vltimam: sed minorem, quàm omnes priores, relicta vltima, ad omnes posteriores, relicta etiam vltima: & multò minorem, quàm omnes priores, relictis duabus vltimis, ad omnes posteriores, relictis pariter duabus vltimis: & sic deinceps etiam minorem, quàm prima, ad primam.

*Hy-*

*Hypoth.*

$a$ $e$
$b$ $f$
$c$ $g$
$d$ $h$

$a$; $e$: maior, quàm $b$; $f$.
$b$; $f$: maior, quàm $c$; $g$.
$c$; $g$: maior, quàm $d$; $h$.

Dico $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maiorem esse, quàm $b+c+d$; $f+g+h$.

Et $b+c+d$; $f+g+h$: maiorem, quàm $c+d$; $g+h$.

Et $c+d$; $g+h$: maiorem, quàm $d$; $h$.

Dico etiam $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minorem esse, quàm $a+b+c$; $e+f+g$.

Et $a+b+c$; $e+f+g$: minorem, quàm $a+b$, $e+f$.

Et $a+b$; $e+f$: minorem, quàm $a$; $e$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $c$; $g$: maior, quàm $d$; $h$. |
| *p. 3.* | $c$; $d$: maior, quàm $g$; $h$. |
| *p. 3.* | $c+d$; $d$: maior, quàm $g+h$; $h$. |
| *p. 3.* | $c+d$: $g+h$: maior, quàm $d$; $h$. Quod &c. |
| *3. 3.* | $c+d$; $c$: minor, quàm $g+h$; $g$. |
| *2. 3.* | $c$; $c+d$: maior, quàm $g$; $g+h$. |
| *p. 3.* | $c$; $g$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. |
| *hypoth.* | $b$; $f$: maior, quàm $c$; $g$. |
| *13. 5.* | $b$; $f$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. |
| *p. 3.* | $b$; $c+d$: maior, quàm $f$; $g+h$. |

$b+c$

$b+c+d$; $c+d$: maior, quàm $f+g+h$; $g+h$.

$b+c+d$; $f+g+h$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. Quod &c.

$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maior, quàm $b+c+d$; $f+g+h$. Quod &c.

$a$; $e$: maior, quàm $b$; $f$.

$a$; $b$: maior, quàm $e$; $f$.

$a+b$; $b$: maior, quàm $e+f$; $f$.

$a+b$; $a$: minor, quàm $e+f$; $e$.

$a+b$; $e+f$: minor, quàm $a$; $e$. Quod &c.

$a+b$; $b$: maior, quàm $e+f$; $f$.

$a+b$; $e+f$: maior, quàm $b$; $f$.

$b$; $f$: maior, quàm $c$; $g$.

$a+b$; $e+f$: maior, quàm $c$; $g$.

$a+b$; $c$: maior, quàm $e+f$; $g$.

$a+b+c$; $c$: maior, quàm $e+f+g$; $g$.

$a+b+c$; $a+b$: minor, quàm $e+f+g$; $e+f$.

$a+b+c$; $e+f+g$: minor, quàm $a+b$; $e+f$. Quod &c.

$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minor, quàm $a+b+c$; $e+f+g$. Quod &c.

re &c.

---

*Theor. 78. Prop. 90.*

:rie harmonica naturali ab vnitate, terminorum armonicè dispositorum, altioris rationis maior ıs, ad maiorem depressioris, maior est, quàm vt hy-arithmus, ad hyperlogarithmum: & hyperlogari-

Qq thmus,

thmus, ad hyperlogarithmum, maior, quàm vt hypologarithmus, ad hypologarithmum: & hypologarithmus, ad hypologarithmum maior, quàm vt minor terminus, ad minorem.

*Hypoth.*

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, termini harmonicè dispositi *a*, *b*, *c*, *d*, quorum altior sit ratio *a* ad *b*, quàm *c* ad *d*. Sitque *a*, maior, quàm *b*: ideoque & *c*, maior, quàm *d*.
def.13 b

Quoniam *a* ad *b*, altior est, quàm *c* ad *d*: oportet *a*, maiorem esse, quàm *c*; & *b*, quàm *d*. alioquin permutando, dispositorum harmonicè *a*, *c*,
34. b.
*b*, *d*, esset *c* maior, quàm *a*; ideoque & *d* maior,
def.13 b
quàm *b*; & *c* ad *d*, altior ratio, quàm *a* ad *b*,
88. b.
*contra hypoth.*

Deinde quoniam *a*, *b*, *c*, *d*, sunt in serie harmonica naturali ab vnitate, harmonicè dispositi; sunt denominati à numeris arithmeticè dispositis:
27. b.
quorum denominator *a*, reciprocè minor est de-
26. b.
nominatore *b*, necnon reciprocè minor denomi-
24. b.
natore *c*. & quot sunt numeri omnes medij inter
def.5 b.
denominatores *a*, *b*; totidem sunt inter denominatores *c*, *d*: totidemque in serie harmonica sunt
27. b.
inter *a*, *b*; totidemque etiam inter *c*, *d*.

Sint ergo inter *a*, *b* termini *e*, *f*: & inter *c*, *d*, totidem termini *g*, *h*: eritque *a+e+f*, hyperlo-
def.22 b
garithmus rationis *a*, ad *b*; & *e+f+b*, hypolo-
def.23 b
gari-

ius eiusdem rationis, inter eosdem terminos $a$, $b$.
que $c+g+h$, hyperlogarithmus rationis $c$ ad $d$; &
, eiusdem hypologarithmus inter eosdem termi-
$d$.

ɔ $a$ ad $c$, maiorem esse, quàm $a+e+f$ ad $c+g+h$:
$a+e+f$ ad $c+g+h$, maiorem, quàm $e+f+b$ ad

$e+f+b$ ad $g+h+d$, maiorem, quàm $b$ ad $d$.

*Demonstr.*

Quoniam $a$, $e$, $f$, $b$, necnon $c$, $g$, $h$, $d$, sunt harmonicè ordinati, in serie harmonica naturali ab vnitate: ergo eorum denominatores, sunt arithmeticè ordinati, in serie arithmetica naturali ab vnitate: totidemque sunt $a$, $e$, $f$, $b$; quot $c$, $g$, $h$, $d$: ergo denominatores $a$, $e$, $f$, $b$; sunt similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores $c$, $g$, $h$, $d$: ergo etiam $a$, $e$, $f$, $b$ sunt similiter harmonicè dispositi, atque $c$, $g$, $h$, $d$: ergo $a$, $e$, $c$, $g$ sunt harmonicè dispositi: ergo permutando $a$, $c$, $e$, $g$, sunt harmonicè dispositi. Similiter ostendetur, quòd $e$, $g$, $f$, $h$ sunt harmonicè dispositi: necnon $f$, $h$, $b$, $d$.

Rursum quoniam $a$, $e$, $f$, $b$ sunt harmonicè ordinati, & est $a$ maior, quàm $b$: ergo $a$ maior, est quàm $e$; & $e$, maior, quàm $f$: & $f$, quàm $b$: item $c$, maior est quàm $g$; $g$, quàm $h$; $h$, quàm $d$. Et quoniam $a$, $c$, $e$, $g$ sunt harmonicè dispositi, & est

def. 13 b. | $a$, maior, quàm $c$; ergo & $e$, maior est, quàm $g$;
82. b. | item $f$, quàm $h$; & $b$, quàm $d$. & est $a$ ad $e$ ratio
def. p. 4. | altior, ideoque maior, quàm $e$ ad $g$; & $e$ ad $g$, altior, & maior, quàm $f$ ad $h$; & $f$ ad $h$, altior, & maior, quàm $b$ ad $d$.

83. b. | Ergo $a$ ad $c$ maior est, quàm vt $a+e+f$ ad $c+g+h$. Quod &c. Et est $a+e+f$ ad $c+g+h$ maior, quàm $e+f$ ad $g+h$: & $e+f$ ad $g+h$ maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$: ergo $a+e+f$ ad $c+g+h$, est maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$. Quod &c. Et est $e+f+b$ ad $g+h+d$, maior, quàm $b$ ad $d$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 79. Prop. 91.*

SI quatuor quantitatum prima ad secundam maior fuerit, quàm tertia ad quartam: productus extremarum, maior est producto mediarum.

*Hypoth.*

$a$; $b$: maior, quàm $c$; $d$.

Dico $ad$: maiorem esse, quàm $bc$.

*Præpar.*

Fiat productus $bd$.

*Demonstr.*

9. b. | $ad$; $bd$: $a$; $b$.
9. b. | $bc$; $bd$: $c$; $d$.
hypoth. | $a$; $b$: maior, quàm $c$; $d$.

$ad$;

13. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
10. 5. | *ad*: maior, quàm *bc*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 80. *Prop.* 92.

SI quatuor quantitatum productus extremarum maior fuerit producto mediarum: erit prima ad secundam maior, quàm vt tertia ad quartam.

*Hypoth.*

Sunt quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: & est *ad* maior, quàm *bc*.

Dico *a*; *b*; maiorem esse, quàm *c*; *d*.

*Præpar.*

Assumatur productus *bd*.

*Demonstr.*

*hypoth.* | *ad*: maior, quàm *bc*.
8. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
9. *h*. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. *h*. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 81. *Prop.* 93.

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam: fuerit autem & tertia ad quartam maior, quàm vt quinta ad sextam: item quinta ad sextam maior fuerit, quàm vt septima ad octauam: erit composita prima

cum

cum tertia, ad compositam secundam cum quarta, maior, quàm vt composita quinta cum septima, ad compositam sextam cum octaua.

*Hypoth.*

*a* *b*:
*c* *d*
*e* *f*
*g* *h*

*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
*e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.

Dico $a+c$; $b+d$: maiorem, quàm $e+g$; $f+h$.

*Præpar.*

Fiant producti *af*, *ah*, *cf*, *ch*, *be*, *bg*, *de*, *dg*.

*Demonstr.*

29. *h.*
$af+ah$: productus *a* per $f+h$.
$cf+ch$: productus *c* per $f+h$.
$af+ah+cf+ch$: productus $a+c$ per $f+h$.
$be+bg$: productus *b*, per $e+g$.
$de+dg$: productus *d*, per $e+g$.
$be+bg+de+dg$, productus $b+d$, per $e+g$.

*hypoth.* | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
*hypoth.* | *c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *e*; *f*.
*hypoth.* | *e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *g*; *h*.

*af*:

93. b. { *af*: maior, quàm *be*.
*ah*: maior, quàm *bg*.
*cf*: maior, quàm *de*.
*ch*: maior, quàm *dg*.

| *af+ah+cf+ch*: maior, quàm *be+bg+de+dg*.
94. b. | *a+c*; *b+d*: maior, quàm *e+g*; *f+h*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 82. *Prop.* 94.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubmultipli: inter ſimplos terminos altioris rationis hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, maiorem habebit rationem, quàm inter ſubmultiplos. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habebit, quàm inter ſubmultiplos.

*Hypoth.*

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

---

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

| Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10): quorum 1(3), maior, quàm 1(6): ideo-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(3) | | 1(4) | | 1(5) | | 1(6) |
| 1(6) | 1(7) | 1(8) | 1(9) | 1(10) | 1(11) | 1(12) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(7) | | 1(8) | | 1(9) | | 1(10) |
| 1(14) | 1(15) | 1(16) | 1(17) | 1(18) | 1(19) | 1(20) |

*def.13b* ideoq; & 1(7), maior, quàm 1(10). & esto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10: ideo-
*def p.4.* que etiam maior. ſint autem & iſtorum æque-
*36. b.* ſubmultipli, 1(6), 1(12), 1(14), 1(20), pa-
15. 5. riter harmonicè diſpoſiti, & æquè cum prædictis proportionales. Sumantur etiam inter 1(3), 1-(6) medij omnes harmonici 1(4), 1(5): & inter 1(7), 1(10), medij omnes 1(8) 1(9); quorum æqueſubmultipli 1(8), 1(10), 1(16), 1(18).
*def.16b* Conſtat quod ſicut 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), &
*def.19b* ſimiliter 1(7), 1(8), 1(9), 1(10) harmonicè ſunt ordinati, ſic 1(6), 1(8), 1(10), 1(12), &
15.5. ſimiliter 1(14), 1(16), 1(18), 1(20) ſunt harmonicè ordinati, & æquè cum prædictis proportionales. Deinde inter 1(6), 1(12), & inter 1(14), 1(20) ſumantur omnes reliqui medij harmonici 1(7), 1(9), 1(11), & 1(15), 1(17), 1(19).

Dico primò 1(3)+1(4)+1(5) ad 1(7)+1(8)+1(9) maiorem eſſe, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) ad 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1-(19). *De-*

*Demonstr.*

1(3); 1(7): 1(6); 1(14).
1(6); 1(14): maior, quàm 1(7); 1(15).
1(6); 1(14): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14)+1(15).
1(3); 1(7): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14)+1(15).

Similiter demonstrabitur.

1(4); 1(8): maior, quàm 1(8)+1(9); 1(16)+1(17). Et
1(5); 1(9): maior, quàm 1(10)+1(11); 1(18)+1(19).
b. 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(8); 1(16).
up. 1(8); 1(16): 1(4); 1(8).
5. 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(4); 1(8).

Similiter demonstrabitur.

sup. 1(8)+1(9); 1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9). Et
sup. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9).
93. b. 1(3)+1(4); 1(7)+1(8): maior, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17).

Similiter demonstrabitur.

93. b. 1(3)+1(4)+1(5); 1(7)+1(8)+1(9): maior,



quàm

$$\frac{\begin{matrix} 1(3) & & 1(4) & & 1(5) & & 1(6) \\ 1(6) & 1(7) & 1(8) & 1(9) & 1(10) & 1(11) & 1(12) \end{matrix}}{\begin{matrix} 1(7) & & 1(8) & & 1(9) & & 1(10) \\ 1(14) & 1(15) & 1(16) & 1(17) & 1(18) & 1(19) & 1(20) \end{matrix}}$$

quàm $1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11);\ 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)$. Quod &c.

Dico secundò $1(4)+1(5)+1(6);\ 1(8)+1(9)+1(10)$: maiorem esse, quàm $1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12);\ 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20)$.

*Demonstr.*

89. h. { $1(7)+1(8);\ 1(15)+1(16)$: maior, quàm $1(4);\ 1(8)$.
$1(4);\ 1(8)$: maior, quàm $1(9)+1(10);\ 1(17)+1(18)$.
$1(9)+1(10);\ 1(17)+1(18)$: maior, quàm $1(5);\ 1(9)$.

93. h. $1(7)+1(8)+1(9)+1(10);\ 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)$: maior, quã $1(4)+1(5);\ 1(8)+1(9)$.

89. h. $1(4)+1(5);\ 1(8)+1(9)$: maior, quàm $1(11)+1(12);\ 1(19)+1(20)$.

89. h. $1(11)+1(12);\ 1(19)+1(20)$: maior, quàm $1(6);\ 1(10)$.

93. h. $1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12);\ 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20)$: maior, quã $1(4)+1(5)+1(6);\ 1(8)+1(9)+1(10)$.

Quod

Quod è conuerso est demonstrandum.

Quare &c.

---

*Theor.* 83. *Prop.* 95.

SI fuerint eiusdem rationis duo hyperlogarithmi, alter ex paucioribus, alter ex terminis vno pluribus; & submultiplicati fuerint vtrorumque termini, per alterius multitudinem terminorum: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, primi sunt ęquales; & reliqui deinceps sunt minores, hoc ordine; secundus eius, qui ex pluribus; & secundus eius, qui ex paucioribus; & tertius eius, qui ex pluribus; & tertius eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps. Quod si fuerint hypologarithmi: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, vltimi sunt æquales; & reliqui deinceps sunt maiores, hoc ordine; penultimus eius, qui ex pluribus; & penultimus eius, qui ex paucioribus; & triultimus eius, qui ex pluribus; & triultimus eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps.

*Hypoth.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(*a*) | | 1(*b*) | 1(*c*) |
| 1(*d*) | 1(*e*) | 1(*f*) | 1(*g*) |
| 1(3*a*) | | 1(3*b*) | 1(3*c*) |
| 1(2*d*) | 1(2*e*) | 1(2*f*) | 1(2*g*) |

Sint earumdem rationum 1(*a*), ad 1(*c*), & 1(*d*) ad 1(*g*) duo hyperlogarithmi; vnus ex duobus terminis 1(*a*), 1(*b*);

 alter

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1(a)$ | | $1(b)$ | $1(c)$ |
| $1(d)$ | $1(e)$ | $1(f)$ | $1(g)$ |
| $1(3a)$ | | $1(3b)$ | $1(3c)$ |
| $1(2d)$ | $1(2e)$ | $1(2f)$ | $1(2g)$ |

alter ex tribus $1(d)$, $1(e)$, $1(f)$: item duo hypologarithmi, ex duobus $1(b)$, $1(c)$, & ex tribus $1(e)$, $1(f)$, $1(g)$. & subtripli accipiantur $1(3a)$, $1(3b)$, $1(3c)$, necnon subdupli $1(2d)$, $1(2e)$, $1(2f)$, $1(2g)$.

Dico $1(3a)$, $1(2d)$ esse æquales: necnon $1(3c)$; $1(2g)$ esse æquales: & hoc ordine, priores maiores esse, & posteriores minores $1(3a)$, $1(2e)$, $1(3b)$, $1(2f)$, $1(3c)$.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 24. b. | $1(a)$; $1(c)$: $1(d)$; $1(g)$: $c$; $a$: $g$; $d$ |
| p. p. | $c$; $g$: $a$; $d$: $c$—$a$; $g$—$d$. |
| 27. b. | $c$—$a$: 2. $g$—$d$: 3. |
| 11. 5. | $c$; $g$: $a$; $d$: 2; 3. |
| 31. b. | $3c$: $2g$. $3a$: $2d$. |
| 10. b. | $1(3c)$: $1(2g)$. $1(3a)$: $1(2d)$. Quæ &c. |
| 6. b. | $2g$---$2f$: $2f$---$2e$: $2e$---$2d$: 2. |
| 6. b. | $3c$---$3b$: $3b$---$3a$: 3. |
| | $3a$, $2e$, $3b$, $2f$, $3c$ sunt, hoc ordine, minores, & deinceps maiores. |
| 10. b. | $1(3a)$, $1(2e)$, $1(3b)$, $1(2f)$, $(13c)$ sunt, hoc ordine, maiores, & deinceps minores. Quod &c. |

Quare &c.

Theo-

*Theor.* 84. *Prop.* 96.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubdupli; alijque ſubtripli; & ſubquadrupli, & ſic deinceps in infinitum: inter ſimplos terminos altioris, rationis hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum depreſſioris maiorem habet rationem, quàm inter ſubduplos: & inter ſubduplos, maiorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habet rationem, quàm inter ſubduplos; & inter ſubduplos, minorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps.

*Hypoth.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(3) | | | 1(4) | | | 1(5) | | | 1(16) |
| 1(6) | | 1(7) | 1(8) | | 1(9) | 1(10) | | 1(11) | 1(12) |
| 1(9) | 1(10) | 1(11) | 1(12) | 1(13) | 1(14) | 1(15) | 1(16) | 1(17) | 1(18) |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(7) | | | 1(8) | | | 1(9) | | | 1(10) |
| 1(14) | | 1(15) | 1(16) | | 1(17) | 1(18) | | 1(19) | 1(20) |
| 1(21) | 1(22) | 1(23) | 1(24) | 1(25) | 1(26) | 1(27) | 1(28) | 1(29) | 1(30) |

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10); quorum 1(3) maior, quàm 1(6); ideoque, & 1(7) maior, quàm 1(10). Et eſto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10). Sint autem iſtorum ſubdupli 1(6), 1(12), 1(14), 1(20): & ſubtripli 1(9), 1(18), 1(21), 1(30). inter quos accipiantur medij harmonici, & ex his Hyperloga-

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(3) | | 1(4) | | | 1(5) | | 1(16) |
| 1(6) | 1(7) | 1(8) | | 1(9) | 1(10) | 1(11) | 1(12) |
| 1(9) 1(10) | 1(11) | 1(12) | 1(13) | 1(14) | 1(15) 1(16) | 1(17) | 1(18) |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1(7) | | 1(8) | | | 1(9) | | 1(10) |
| 1(14) | 1(15) | 1(16) | | 1(17) | 1(18) | 1(19) | 1(20) |
| 1(21) 1(22) | 1(23) | 1(24) | 1(25) | 1(26) | 1(27) 1(28) | 1(29) | 1(30) |

logarithmi, & Hypologarithmi.

94. *h.* Constat primò, quòd inter simplos, maior est hyperlogarithmus altioris, ad hyperlogarithmum depressioris, quàm inter subduplos: & hypologarithmus minor.

Dico 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14) +1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maiorem esse, quàm 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29).

*Præpar.*

Sumantur ipsorum 1(6), 1(7), 1(4), 1(5) subtripli: & 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23) subdupli.

*Demonstr.*

95. *h.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22) sunt maiores, & deinceps minores.

95. *h.* 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) sunt maiores, & deinceps minores.

40. *h.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22), & 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) sunt similiter harmonicè dispositi.

1(18),

88. b. { 1(18); 1(42): maior, quàm 1(20); 1(44).
1(20); 1(44): maior, quàm 1(21); 1(45).
1(21); 1(45): maior, quàm 1(22); 1(46).

36. b. { 1(18), 1(22), 1(42), 1(45) similiter proportionales, atque 1(6), 1(7), 1(14), 1(15).
1(18), 1(20), 1(22), 1(42), 1(44), 1(46) similiter proportionales, atque 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23).

89. b. | 1(6); 1(14): maior, quã 1(9)+1(10); 1(21)+1(22).

89. b. | 1(9) + 1(10); 1(21)+1(22): maior quàm 1(7); 1(15).

13. 5. | 1(7); 1(15): maior, quàm 1(11); 1(23).

*sup.* { 1(11); 1(23): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(12)+1(13); 1(24) +1(25).
1(12)+1(13); 1(24)+1(25): maior, quàm 1(9); 1(17).
Et sic deinceps quoad fuerint termini.

93. b. | 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maior, quã 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29). Quod &c.

Dico etiam 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): minorem esse, quàm 1(10) + 1(11) + 1(12) + 1(13) + 1(14) + (15) +1(16)

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

+1(16)+1(17)+(1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)
+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30).

*Demonstr.*

*sup.*
1(10); 1(22): maior, quàm 1(7); 1(15).
1(7); 1(15): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(13)+1(14).
1(11)+1(12); 1(23)+1(24): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(13); 1(25).
Et sic deinceps, quoad fuerint termini.

93. *b.* 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30): maior, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20). Quod è conuerso &c.

Quare &c.

---

*Theo-*

*Theor. 85. Prop. 97.*

Eiusdem rationis numerosæ inter maiores terminos, maior est hyperlogarithmus ad hypologarithmum, quàm inter minores.

*Demonstr.*

Nàm sunt maiores, & deinceps minores, hoc
54. h. ordine, hyperlogarithmus inter maiores termi-
57. h. nos, hyperlogarithmus inter minores, hypologa-
56. h. rithmus inter minores, & hypologarithmus inter
8. 5. maiores. Quare inter maiores, hyperlogarithmus ad hypologarithmum, maior est, quàm inter minores.

---

*Theor. 86. Prop. 98.*

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè dispositorum, altioris rationis logarithmus ad logarithmum depressioris, minor est, quàm vt hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum; & maior, quàm vt hypologarithmus ad hypologarithmum.

*Hypoth. commun.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | *B* | *C* | | | *D* |
| | | | | *N* | | *O* |
| *G* | | *H* | | *I* | | *K* |
| *R* | *S* | | | *P* | *Q* | |
| | *E* | | | *F* | | |

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *A*, *B*, *C*, *D*, harmonicè dispositi: quorum ratio *A*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | | *B* | *C* | | *D* |
| | | | *N* | | *O* |
| *G* | *H* | | *I* | *K* | |
| *R* | *S* | | *P* | *Q* | |
| | *E* | | | *F* | |

ad *B*, altior, quàm *C* ad *D*. Et sit rationis *A* ad *B*, logarithmus *E*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *F*. Sint autem inter *A*, *B*, *C*, *D*, vel inter æqueproportionales numerosos terminos hyperlogarithmi, & hypologarithmi: rationis quidem *A* ad *B*, hyperlogarithmus *G*, & hypologarithmus *H*: & rationis *C* ad *D*, hyperlogarithmus *I*, & hypologarithmus *K*.

Dico *E* ad *F* minorem esse, quàm *G* ad *I*; maiorem, quàm *H* ad *K*.

*Præpar.*

Esto, si potest, *E* ad *F*, maior, quàm *G* ad *H*: & sumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum ratione *G* ad *H*, componit rationem, *E* ad *F*. Et quoniam minor, quàm *E*, est ad *F*, vt *G* ad *H*: *L* ad *M*, est vt *E* ad minorem, quàm *E*: quare *L*,
62. h. maior est, quàm *M*. Inueniatur rationis *C* ad *D* hyperlogarithmus *N*, qui sit minor ad hypologarithmum *O*, quàm vt *L* ad *M*. Quod si termini, inter quos censentur *N*, *O*, non sunt minores, quàm inter quos *H*, *K*; sumantur alij minores æqueproportionales ad *C*, *D*, necnon alij

æque-

æqueproportionales ad *A*, *B*: inter quos rationis quidem *C* ad *D* sint hyperlogarithmus *P*, & hypologarithmus *Q*; & rationis *A* ad *B* hyperlogarithmus *R*, & hypologarithmus *S*.

*Demonstr.*

96. *h.* | *R*; *P*: minor est, quàm *G*; *H*.
97. *h.* | *P*; *Q*: minor, quàm *N*; *O*: & minor, quàm *L*; *M*.
4. 3. | *R*; *Q*: minor, quàm *G*; *H*, + *L*; *M*.
*suppos.* | *E*; *F*: *G*; *H*, + *L*; *M*.
13. 5. | *R*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*. *contra* 82. *h*.

Ergo *E* ad *F*, non est maior, quàm *G* ad *H*.

*Præpar.*

Esto *E* ad *F*, eadem, quæ *G* ad *H*, si potest: & inter minores terminos, quàm quos inter sunt hyperlogarithmi *G*, *H*, sumantur alij *R*, *P*.

*Demonstr.*

96. *h.* | *G*; *H*: maior, quàm *R*; *P*.
*suppos.* | *E*; *F*: *G*; *H*.
13. 5. | *E*; *F*: maior, quàm *R*; *P*. *contra demonstrata superiùs*.

Ergo *E* ad *F*, non est, vt *G* ad *H*.

Ergo *E* ad *F*, est minor, quàm vt *G* ad *H*. Quod &c.

*Præpar.*

Esto deinde *E* ad *F*, minor, quàm *I* ad *K*: & sumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum *E* ad *F*, rationem *I* ad *K* componit. Et quòniam maior, quàm *E*, ad *F*, est vt *I* ad *K*: *L* ad *M*, est vt maior, quàm *E*, ad *E*: & *L*, ma-

A B C D
N O
G H I K
R S P Q
E F

ior eſt, quàm $M$. Deinde fiant eadem, quæ ſupra.

*Demonſtr.*

82. h. | $S; P$: minor eſt, quàm $E; F$.
præpar. | $P; Q$: minor, quàm $L; M$.
4. 3. | $S; Q$: minor, quàm $E; F, + L; M$.
ſuppoſ. | $I; K$: $E; F, + L; M$.
13. 5. | $S; Q$: minor, quàm $I; K$: *contra* 96. h.

*Præpar.*

Ergo $E$ ad $F$ non eſt minor, quàm $I$ ad $K$.

*Præpar.*

Eſto $E$ ad $F$, eadem, quæ $I$ ad $K$: & inter minores terminos, quàm quos inter ſunt hypologarithmi $I$, $K$, ſumantur alij $S$, $Q$.

*Demonſtr.*

ſuppoſ. | $E; F$: $I; K$.
96. h. | $I; K$: minor eſt, quàm $S; Q$.
13. 5. | $E; F$: minor, quàm $S; Q$. *contra ſuperiùs demonſtrata.*

Ergo $E$ ad $F$, non eſt eadem, quæ $I$ ad $K$.
Ergo $E$ ad $F$, eſt maior, quàm $I$ ad $K$. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 87. *Prop.* 99.

QVatuor terminorum è ferie harmonica naturali ab vnitate dispositorum harmonicè, altioris rationis maior terminus ad maiorem depressioris, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum: & logarithmus ad logarithmum, maior, quàm vt minor ad minorem.

*Hypoth.*

Sint è ferie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè dispositi: quorum ratio *a* ad *b*, altior, quàm *c* ad *d*: & *a*, maior, quàm *b*: ideoque etiam *c*, maior, quàm *d*. Et esto rationis *a* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *a*; *c*: maiorem, quàm *e*; *f*.

Et *e*; *f*: maiorem, quàm *b*; *d*.

*Præpar.*

Rationis *a* ad *b*, sumantur hyperlogarithmus *g*, & hypologarithmus *h*: & rationis *c* ad *d*, hyperlogarithmus *l*, & hypologarithmus *m*.

*Demonstr.*

| | |
|---|---|
| 90. *h*. | *a*; *c*: maior, quàm *g*; *l*. |
| 98. *h*. | *g*; *l*: maior, quàm *e*; *f*. |
| 98. *h*. | *e*; *f*: maior, quàm *h*; *m*. |
| 90. *h*. | *h*; *m*: maior, quàm *b*; *d*. |
| 13. 5. | *a*; *c*: maior, quàm *e*; *f*. Quod &c. |
| 13. 5. | *e*; *f*: maior, quàm *b*; *d*. Quod &c. |

Quare &c.

---

Theo-

*Theor. 88. Prop. 190.*

QVatuor numerorum arithmeticè dispositorum, ratio primi ad secundum, totuplicata, quotus est primus, maior est, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus est quartus: atque totuplicata ratio primi ad secundum, quotus est secundus, minor est, quàm totuplicata tertij ad quartum, quotus est tertius.

*Hypoth.*

Sint quatuor numeri arithmeticè dispositi $a$, $b$, $c$, $d$.

Dico rationem $a$ ad $b$ totuplicatam, quotus est $a$, maiorem esse, ratione $c$ ad $d$, totuplicata, quotus est $d$: & rationem $a$ ad $b$ totuplicatam, quotus est $b$, minorem esse, ratione $c$ ad $d$ totuplicata, quotus est $c$.

*Præparatio.*

Sumantur in serie harmonica naturali ab vnitate termini æqueordinati cum numeris $a$, $b$, $c$, $d$, in serie arithmetica naturali: nempe vnitates denominatæ ab ipsis: $1(a)$, $1(b)$, $1(c)$, $1(d)$. Et esto rationis $c$ ad $b$, logarithmus $e$: & rationis $c$ ad $d$, logarithmus $f$.

*Demonstr. p.*

Terminus $a$, vel minor est, vel maior, quàm $b$: & rursum $a$, vel minor est, vel maior, quàm $c$. Esto $a$, minor, quàm $b$: & minor, quàm $c$.

| | |
|---|---|
| *hypoth.* | $a$, $b$, $c$, $d$: arithmeticè dispositi. |
| 14. *h.* | $1(a)$, $1(b)$, $1(c)$, $1(d)$: harmonicè dispositi. |
| *sup.* | $1(a)$: maior, quàm $1(b)$: & maior, quàm $1(c)$. |
| 88. *h.* | $1(a)$; $1(b)$: altior, & maior, quàm $1(c)$; $1(d)$. |

$1(a)$;

65. *h.* | 1($a$); 1($b$): logarithmus $e$.
65. *h.* | 1($c$); 1($d$): logarithmus $f$.
12. *h.* | 1($a$): maior, quàm 1($b$).
*def.* 13 *h* | 1($c$): maior, quàm 1($d$).
8. 5. | 1($a$); 1($d$): maior, quàm 1($a$); 1($c$).
99. *h.* | 1($a$); 1($c$): maior, quàm $e$; $f$.
99. *h.* | $e$; $f$: maior, quàm 1($b$); 1($d$).
8. 5. | 1($b$); 1($d$): maior, quàm 1($b$); 1($c$).
13. 5. | 1($a$); 1($d$): maior, quàm $e$; $f$.
13. 5. | $e$; $f$: maior, quàm 1($b$); 1($c$).
12. *h.* | 1($a$); 1($d$): $d$; $a$.
12. *h.* | 1($b$); 1($c$): $c$; $b$.
13. 5. | $d$; $a$: maior, quàm $e$; $f$.
13. 5. | $e$; $f$: maior, quàm $c$; $b$.
91. *h.* | $df$: maior, quàm $ae$.
91. *h.* | $eb$: maior, quàm $fc$.

*hypoth.* Et quoniam $f$, logarithmus est rationis $c$ ad $d$:
73. *h.* ergo $df$, logarithmus est rationis $c$ ad $d$, totu-
*hypoth.* plicatæ, quotus est $d$. item quoniam $e$, logari-
73. *h.* thmus est rationis $a$ ad $b$: ergo $ae$, logarithmus
est rationis $a$ ad $b$ totuplicatæ, quotus est $e$. Et
74. *h.* vt $ae$ ad $df$, ita est ratio $a$ ad $b$ totuplicata, quo-
tus est $a$, ad rationem $c$ ad $d$ totuplicatam quo-
71. *h.* tus est $d$. est autem $ae$, minor, quàm $df$: ergo ra-
tio $a$ ad $b$ totuplicata, quotus est $a$, depressior
*hypoth.* est $a$ ratione $c$ ad $d$ totuplicata, quotus est $d$. est
*def.* 5. *h.* autem $a$ minor, quàm $b$; & $c$, minor, quàm $d$:

Ergo

def.2.4. Ergo maior est ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*. Quod &c.

73. b. Similiter ostendetur, quod *eb*, logarithmus est rationis *a* ad *b*, totuplicatæ, quotus est *b*: & *fc* sup. logarithmus *c* ad *d* totuplicatæ, quotus est *c*: sed 71. b. est *eb*, maior, quàm *fc*: ergo ratio *a* ad *b* totuplicata quotus est *b*, altior est, quàm *c* ad *d* totuhypoth. plicata quotus est *c*. & est *a* minor, quàm *b*; & def.5.b. *c* minor, quàm *d*: ergo minor est ratio *a* ad *b* todef p.4. tuplicata, quotus est *b*, quàm ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

*Demonstr.2.*

Esto *a*, minor, quàm *b*: & maior, quàm *c*. hypoth. ergo *c*, *d*, *a*, *b*, sunt quatuor numeri arithmeticè def.5.b. dispositi; quorum *c*, minor est, quàm *d*; & misup. nor, quàm *a*. Et ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*, maior est, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*. Quod &c.

*Demonstr.3.*

Esto *a*, maior, quàm *b*, & minor, quàm *c*. hypoth. Ergo *b*, *a*, *d*, *c*, sunt quatuor numeri arithmetibef.5.b. cè dispositi; quorum *b*, minor, quàm *a*; & misup. nor, quàm *d*. Et ratio *b* ad *a* totuplicata, quotus est *b*, maior, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus

tus

tus eſt *c*: & *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *a*, minor, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *d*. Et

2.3. conuertendo *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *c* ad *d*, totuplicata, quotus eſt *d*: & *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *b*, minor, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

*Demonſtr.* 4.

Eſto *a* maior vtriſque *b*, & *c*: eritque *d* minor vtriſque *c*, & *b*. Sunt ergo quatuor numeri

def. 5. b. ſup. *d*, *c*, *b*, *a* diſpoſiti arithmeticè: quorum ratio *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *d*, maior, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *a*: & *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *c*, minor, quàm *b* ad *a* totuplicata,

2.3. quotus eſt *b*. Et conuertendo, *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*, maior, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *b*. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor.* 89. *Prop.* 101.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, & primus maior ſecundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad ſextum, maior quàm vt primus ad quartum: erit primi ad ſecundum totuplicata ratio, quotus eſt quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus eſt ſextus.

*Hypoth.*

Sint quatuor arithmeticè diſpoſiti numeri *a*, *b*,
def.5.h. *c*, *d*: & ſit primus *a*, maior ſecundo *b*; ideoque
etiam tertius *c*, maior quarto *d*: & ſint alij duo,
quintus *e* ad ſextum *f*, maior quàm *a* ad *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *e*, maiorem eſſe ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*.

*Præpar.*

Rationis *a* ad *b*, logarithmus aſſumatur *g*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *h*.

*Demonſtr.*

100.h. Ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, maior
eſt ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*: &
hypoth. ambæ ſunt maioris inæqualitatis: ergo ratio *a* ad
def.p.4. *b* totuplicata, quotus eſt *a*, altior eſt, quàm *c* ad
*d* totuplicata, quotus eſt *d*. Eſt autem rationis *a*
73.h. ad *b* totuplicatæ, quotus eſt *a*, logarithmus *ag*:
& rationis *c* ad *d* totuplicatæ, quotus eſt *d*, loga-
hypoth. rithmus *hd*: ergo *ag* maior eſt, quàm *hd*. Et quo-
p.3. 9.h. niam *e* ad *f* maior eſt, quàm vt *a* ad *d*: permu-
tando, *e* ad *a*, maior eſt, quàm vt *f* ad *d*. Sed *e*
ad *a*, eſt vt *eg* ad *ag*: & *f* ad *d*, vt *fh* ad *dh*.
13.5. Ergo *eg* ad *ag*, maior eſt, quàm vt *fh* ad *dh*: &
p.3. permutando, *eg* ad *fh*, maior, quàm vt *ag* ad *dh*.
73.h. Et eſt *eg*, logarithmus rationis *a* ad *b* totuplica-
tæ, quotus eſt *e*: & *fh*, logarithmus rationis *c* ad
71.h. *d* totuplicatæ, quotus eſt *f*. ergo ratio *a* ad *b*
totu-

totuplicata, quotus eſt *e*, altior eſt ratione *c* ad *d*
*hypoth.* totuplicata, quotus eſt *f*. Et vtraque maioris eſt
*def.p.4.* inæqualitatis. Ergo ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *e*, maior eſt ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 90. Prop. 102.*

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, & primus minor ſecundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad ſextum, minor, quàm vt primus ad quartum: erit primi ad ſecundum totuplicata ratio, quotus eſt quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus eſt ſextus.

*Hypoth.*

Sint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, *a*, *b*,
*def.5.h.* *c*, *d*: & ſit *a*, minor, quàm *b*: ideoque etiam *c*, minor, quàm *d*: & ſit *e*, ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *d*.

Dico *a* ad *b* totuplicatam rationem, quotus eſt *e*, maiorem eſſe ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*.

*Demonſtr.*

*hypoth.* Sunt enim *d*, *c*, *b*, *a*, arithmeticè diſpoſiti: & eſt
*2. 3.* *d*, maior, quàm *c*: & *f* ad *e*, maior, quàm *d* ad *a*:
*101. h.* ergo *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt, *f* maior eſt, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *e*: & conuer-
*2. 3.* tendo *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*, minor,

quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *e*. Quod &c.

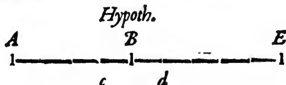
Quare &c.

---

*Probl.* 13. *Prop.* 103.

DAta quantitate, dataque ratione inæqualitatis, inuenire terminos in data ratione, quorum differentia eſt quantitas data.

*Hypoth.*




Sit data quantitas *A B*, dataque ratio *c* ad *d*; & eſto *c*, maior, quàm *d*.

Oportet inuenire terminos in ratione *c* ad *d*, quorum exceſſus *A B*.

*Conſtr.*

Fiat *c*—*d*; *d*: *AB*; *BE*.

Dico *AE*; *EB*: *c*; *d*.

*Demonſtr.*

*conſtr.* | *AB*; *BE*: *c*---*d*; *d*.

2. *p.* | *AE*; *EB*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

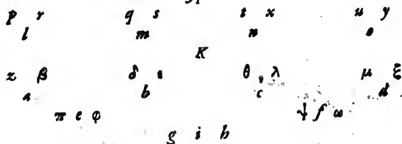
---

*Theor.* 91. *Prop.* 104.

SI quatuor quantitatum non numeroſas rationes habentium, harmonicè diſpoſitarum, prima maior fuerit, quàm vtralibet ſecunda, & tertia: logarithmus rationis pri-

primæ ad ſecundam ad logarithmum tertiæ ad quartam, non erit maior, quàm vt prima ad tertiam, nec minor, quàm vt ſecunda ad quartam.

*Hypoth.*




Sunto quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, *a*, *b*, *c*, *d*: quarum *a*, maior, quàm *b*, & maior, quàm *c*. & ſunto *a* ad *b*, & *c* ad *d*, rationes non numeroſæ. & rationis *a* ad *b*, eſto logarithmus *e*: rationis autem *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *e* ad *f*, non maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*; nec minorem, quàm vt *c* ad *d*.

*Suppoſito falſa alternatiua.*

Eſto, ſi fieri poteſt, vel maior *e* ad *f*, quàm vt *a* ad *b*, ratione *g* ad *h* maioris inæqualitatis, vel minor, quàm vt *c* ad *d*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis.

*Præpar.*

Fiat *g*; *i*: *i*; *h*. Sumatur quantitas *K*.

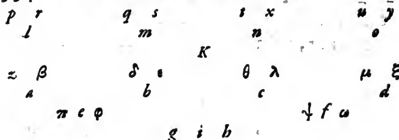
Fiat *a*; *K*: *K*; *l*.

*b*; *K*: *K*; *m*.

*c*; *K*: *K*; *n*.

*d*; *K*: *K*; *o*.

Da-




77. b. Datis non numerosis rationibus *a* ad *b*, & *c* ad *d*, vel *m* ad *l*, & *o* ad *n*: dataque ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*, maioris inæqualitatis, quatuor inueniantur numerosæ rationes, *p* ad *q*, altior, quàm *l* ad *m*; & *r* ad *s* depressior: propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

88. b. Et quoniam *a* ad *b*, ratio est altior, quàm *c* ad
24. b. *d*: & sunt *l*, *m*, *n*, *o*, reciprocè, sicut *a*, *b*, *c*, *d*:
2. 3. etiam *l* ad *m*, ratio est altior, quàm *n* ad *o*. Itaq; si forte contingeret *r* ad *s*, non altior, quàm *n* ad
76. b. *o*: inueniatur altera *r* ad *s*, depressior quidem, quàm *l* ad *m*; sed ei propior; atque altior, quàm
76. b. *n* ad *o*. Et similiter inueniatur *t* ad *u*, depressior,
77. b. quàm *r* ad *s*; altior, quàm *n* ad *o*: necnon inueniatur *x* ad *y*, depressior, quàm *n* ad *o*; vt fiant *t* ad *u*, & *x* ad *y*, propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

103. b. Dataque differentia *l*, *m*: datis quoque rationibus *p*, ad *q*, *r* ad *s*, *t* ad *u*, *x* ad *y*, inueniantur

tur earumdem termini $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $x$, $y$, easdem habentes rationes, & eamdem differentiam $l$, $m$.

*Fiat* $p$; $K$: $K$; $\zeta$.

$r$; $K$: $K$; $\beta$.

$q$: $K$: $K$; $\delta$.

$s$; $K$: $K$; $\iota$.

$t$; $K$: $K$; $\theta$.

$x$; $K$: $K$; $\lambda$.

$u$; $K$: $K$; $\mu$.

$y$; $K$: $K$; $\xi$.

Et rationis $\zeta$ ad $\delta$, logarithmus esto $\pi$.

rationis $\beta$ ad $\iota$, logarithmus $\varphi$.

rationis $\theta$ ad $\mu$, logarithmus $\psi$.

rationis $\lambda$ ad $\xi$, logarithmus $\omega$.

*Demonstr. commun.*

*hypoth.* | $a$, $b$, $c$, $d$, sunt harmonicè dispositæ.

33. *h.* | $l$, $m$, $n$, $o$, arithmeticè dispositæ.

*hypoth.* | $a$, maior, quàm $b$: & maior, quàm $c$.

24. *h.* | $l$, minor, quàm $m$: & minor, quàm $n$.

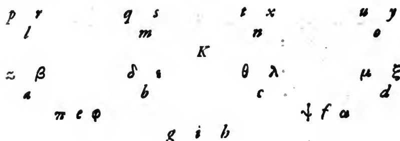
*constr.* | $p$, $q$; $l$, $m$; $r$, $s$; $t$, $u$; $n$, $o$; $x$, $y$: binæ, & binæ sunt arithmeticè dispositę, antecedentes minores consequentibus.

*def.* 34. *h* | $\pi$ : maior, quàm $e$. & $e$; maior, quàm $\varphi$.
$\psi$: maior, quàm $f$. & $f$: maior, quàm $\omega$.

*constr.* | Et quoniam $g$, ad $i$, maior est logarithmicè, quàm vt ratio $\zeta$ ad $\delta$, ad rationem $\beta$ ad $\iota$: ratio

12. 4. | autem $\zeta$ ad $\delta$, ad rationem $\beta$ ad $\iota$, logarithmicè

maior




81. *b.* maior est, quàm vt ad rationem *a* ad *b*: & ratio
z ad δ, ad rationẽ *a* ad *b*, est logaritmicè, vt π ad
13.5. *e*: ergo *g* ad *i* est maior, quàm vt π ad *e*. Simi-
liter ostendetur *g* ad *i*, maior, quàm *e* ad φ: &
maior, quàm ψ ad *f*: & maior, quàm *f* ad ω.

*constr.* Deinde quoniam *p* ad *q*, vel z ad δ ratio est
*sup.* altior, quàm *l* ad *m*, vel *a* ad *b*; & sunt z, δ,
*hypoth.* *a*, *b* harmonicè dispositæ; & est *a*, maior, quàm
7.5. *b*: oportet z, & δ maiores esse, quàm *a*, *b*. si e-
nim essent æquales; esset ratio z ad δ, æquealta
rationi *a* ad *b*: si verò esset z, minor, quàm *a*;
*def.13b* ideoque & δ, minor, quàm *b*; esset ratio z ad δ,
88. *b.* depressior, quàm *a* ad *b*: contra assumptum. Si-
militer ostendetur, quòd *a*, maior est, quàm β; &
*b*, quàm ι: item θ, maior, quàm *c*; & μ, quàm
*d*: & *c*, quàm λ; & *d*, quàm ξ.

*Suppositio falsa prima.*

Esto *e* ad *f*, maior, quàm *a* ad *c*: si potest.

De-

*Demonstr. p.*

| | |
|---|---|
| *præpar.* | $e; f: a; c, +g; i, +i; h.$ |
| *def. 5. 6.* | $e; \varphi, +\varphi; \psi, +\psi; f: e; f.$ |
| 11. 5. | $e; \varphi, +\varphi; \psi, +\psi; f: a; c, +g; i, +i; h.$ |
| *sup.* | $e; \varphi$: minor, quàm $g; i.$ |
| *sup.* | $\psi; f$: minor, quàm $i; h.$ |
| 4. 3. | $\varphi; \psi$: maior, quàm $a; c.$ si enim esset eadem, vel minor: esset $e; f$: minor, quàm $a; c, +g; h.$ contra assumptum. |
| *præpar.* 25. *h.* | Sunt autem $\beta, \iota, \theta, \mu,$ harmonicè dispositæ quantitates, numerosasque habentes rationes; & proportionales sicut quidam termini è serie har- |
| *præpar.* | monica naturali ab vnitate: quorum rationis $\beta$ ad $\iota$, logarithmus est $\varphi$; & rationis $\theta$ ad $\mu$, loga- |
| *sup.* | rithmus est $\psi$. Est autem sicut $r$ ad $s$ ratio altior, quàm $t$ ad $u$: sic $\beta$ ad $\iota$, altior, quàm $\theta$ ad $\mu$: & |
| *sup.* | est $\beta$, maior, quàm $\iota$; ideoque & $\theta$, maior, |
| 99. *h.* | quàm $\mu$. Ergo $\beta$ ad $\theta$, maior est, quàm $\varphi$ ad $\psi$. |
| 13. 5. | Ergo $\beta$ ad $\theta$, maior est, quàm $a$ ad $c$. *contra* 8. 5. |

Ergo $e$ ad $f$, non maior est, quàm $a$ ad $c$. Quod &c.

*Suppos. fals. 2.*

Esto $e$ ad $f$, minor, quàm $b$ ad $d$, si potest.

*Demonstr. 2.*

| | |
|---|---|
| *præpar.* | $e; f, +g; h: b; d.$ |
| *sup.* | $\pi; e$: minor, quàm $g; i.$ |
| *sup.* | $f; \omega$: minor, quàm $i; h.$ |
| *sup.* | $\pi; \omega$: minor, quàm $e; f, +g; h.$ |

13. 5. $\pi$; $\omega$: minor, quàm *b*; *d*.

Sunt autem $\zeta$, $\delta$, $\lambda$, $\xi$, harmonicè diſpoſitæ,
præpar. numeroſas rationes habentes; & proportionales,
25. b. ſicut quidam termini è ſerie harmonica naturali
præpar. ab vnitate: quorum rationis $\zeta$ ad $\delta$, logarithmus
eſt $\pi$; & rationis $\lambda$ ad $\xi$, logarithmus eſt $\omega$: &
ſup. eſt $\zeta$ ad $\delta$ ratio altior, quàm *a* ad *b*; ſicut *p* ad
*q*, altior, quàm *l* ad *m*: & *l* ad *m* altior, quàm
*n* ad *o*, vel *c* ad *d*: & *c* ad *d*, altior, quàm $\lambda$ ad
$\xi$; ſicut *n* ad *o*, altior, quàm *x* ad *y*: ergo $\zeta$ ad
$\delta$, altior eſt, quàm $\lambda$ ad $\xi$: & eſt $\zeta$, maior, quàm
99. b. $\delta$; & $\lambda$, maior, quàm $\xi$: Ergo $\pi$ ad $\omega$ maior
13. 5. eſt, quàm $\delta$ ad $\xi$. Ergo $\delta$ ad $\xi$ minor eſt, quàm
*b* ad *d*. *contra* 8. 5.

Ergo *e* ad *f*, non minor eſt, quàm *b* ad *d*. Quod &c.
Quare &c.

---

*Theor.* 92. *Prop.* 105.

QVatuor arithmeticè diſpoſitarum quantitatum, ſi prima ad vltimam, fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad ſecandam totuplicata ratio, quotus eſt homologus primæ, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata ratio, quotus eſt homologus quartæ. quòd ſi ſecunda ad tertiam fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad ſecundam totuplicata ratio, quotus eſt homologus ſecundæ, minor, quàm tertię ad quartam totuplicata, quotus eſt homologus tertiæ.

*Hy-*

*Hypoth.*

Sunto quatuor arithmeticè diſpoſitæ quantitates *A*, *B*, *C*, *D*. & eſto, vel alterutrum, vel vtrumque iſtorum, videlicet: *A* ad *D*, vt numerus *a*, ad numerum *d*: & *B* ad *C*, vt numerus *b*, ad numerum *c*.

Dico rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *a*, maiorem eſſe ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *b*, minorem ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*.

*Præpar. commun.*

Sumatur rationalis *u*: & per quantitates denominetur arithmeticè diſpoſitas, vt fiant fractiones
13.h. *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*), harmonicè diſpoſitæ. Sitque rationis *A* ad *B* logarithmus *e*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *f*.

*Demonſtr. p.*

Quantitatum *A*, *B*, *C*, *D*, vel duæ tantùm extremæ *A*, *D*, erunt vt numeri; vel duæ tantùm mediæ *B*, *C*: vel binæ tantùm extremæ inuicem *A*, *D*; & mediæ inuicem *B*, *C*: vel tres inuicem ſunt vt numeri.

4.8. Sunto tres inuicem *A*, *B*, *C*, vt numeri: & aſſumantur tres numeri *g*, *h*, *i* proportionales, vt
def.5.h. *A*, *B*, *C*: quod ſi *A*, minor eſt, quàm *B*; etiam *C*,
2.p. minor eſt, quàm *D*; & *g* minor, quàm *h*. & per homologiam, eſt defectus *g*, *h*, ad *i*, vt defectus *A*, *B*, ad *C*. addatur defectus *g*, *h*, numero *i*, &
e.p. fiat numerus *l*. erit ergo componendo vt *l* ad *i*,

def.5.h. ita $D$ ad $C$. Si verò $A$, maior eſt, quàm $B$: profectò $C$, maior eſt, quàm $C$ --- $D$, vel quàm $A$
2.p. --- $B$: & per homologiam, ſicut $C$, maior eſt, quàm $A$ --- $B$, ita $i$, maior eſt, quàm $g$ --- $h$. Auferatur itaque $g$ --- $h$, ab $i$ numero; & relinquatur $l$: &
2.p. erit, diuidendo, $C$ ad $D$, vt $i$ ad $l$.

Quare $A$, $B$, $C$, $D$ ſunt proportionales inuicem, vt numeri, $g$, $h$, $i$, $l$. & numeri $g$, $h$, $i$, $l$, ſunt arithmeticè diſpoſiti: quorum ratio $g$ ad $h$
100. h. totuplicata, quotus eſt $g$, maior eſt, quàm ratio $i$ ad $l$ totuplicata, quotus eſt $l$: & ratio $g$ ad $h$ totuplicata, quotus eſt $h$, minor, quàm ratio $i$ ad $l$
6.4. totuplicata, quotus eſt $i$. Sed $g$ ad $h$ totuplicata ratio, quotus eſt $g$, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt $a$, eſt logarithmicè, vt $g$ ad $a$: & $i$ ad $l$ totuplicata, quotus eſt $l$, eſt logarithmicè ad eamdem totuplicatam, quotus eſt $d$, vt $l$ ad $d$. Et quoniam $g$ ad $l$ eſt vt $A$ ad $D$: & $A$ ad $D$, vt
11.5. $a$ ad $d$: ergo $g$ ad $l$, eſt vt $a$ ad $d$: & permutan-
2.p. do $g$ ad $a$, vt $l$ ad $d$. Ergo ratio $g$ ad $h$ totupli-
15.4. cata, quotus eſt g, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt $a$, eſt vt $i$ ad $l$ totuplicata, quotus eſt $l$,
18.4. ad eamdem totuplicatam, quotus eſt $d$. Ergo ſi $g$ ad $h$ totuplicata, quotus eſt $g$, altior eſt, quàm $i$ ad $l$ totuplicata, quotus eſt $l$, etiam $g$ ad $h$ totuplicata, quotus eſt $a$, altior eſt, quàm $i$ ad $l$ totuplicata, quotus eſt $d$: ſi depreſsior, depreſsior.

ergo

100.h. ergo sicut $g$ ad $h$ totuplicata, quotus est $g$, maior est, quàm $i$ ad $l$ totuplicata, quotus est $l$; siue
def.5.h. sint $g$ ad $h$, & $i$ ad $l$ rationes maioris inæqualitatis,
deff. 1. & 2.4. siue sint minoris ambæ: erit & $g$ ad $h$ totuplicata, quotus est $a$, maior, quàm $i$ ad $l$ totuplicata, quotus est $d$. Et est $g$ ad $h$, eadem, quæ $A$ ad $B$: & $i$ ad $l$, eadem, quæ $C$ ad $D$. ergo $A$ ad $B$ totuplicata ratio, quotus est $a$, maior est, quàm $C$ ad $D$ totuplicata, quotus est $d$. Quod &c.

Simili prorus demonstratione ostendetur, quòd ratio $A$ ad $B$ totuplicata, quotus est $b$, minor est, quàm $C$ ad $D$ totuplicata, quotus est $c$. Quod &c.

*Demonstr.2.*

Sunto vel duo tantùm extremi $A$, $D$, vt numeri; vel duo tantùm medij $C$, $D$; vel bini, & bini $A$, $D$, & $B$, $C$; non autem tres, aut quatuor. profectò vel est quantitas $A$, minor, quàm $B$, vel maior: & rursum quantitas $A$, minor, quàm $C$, vel maior.

Esto $A$, minor, quàm $B$, & minor, quàm $C$.

14. h. $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$, sunt harmonice dispositi.
12. h. $u(A)$: maior, quàm $u(B)$.
12. h. $u(A)$: maior, quàm $u(C)$.
88. h. $u(A)$; $u(B)$: altior, & maior, quàm $u(C)$; $u(D)$.
78. h. $u(A)$; $u(B)$: logarithmus $e$.
78. h. $u(C)$; $u(D)$: logarithmus $f$.
def.13 h $u(C)$: maior, quàm $u(D)$.
8. 5. $u(A)$; $u(D)$: maior, quàm $u(A)$; $u(C)$.

$u(A)$;

104. *h.* | $u(A)$; $u(C)$: non minor, quàm $e$; $f$.
104. *h.* | $e$; $f$: non minor, quàm $u(B)$; $u(D)$.
8. 5. | $u(B)$; $u(D)$: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
13. 5. | $u(A)$; $u(D)$; maior, quàm $e$; $f$.
13. 5. | $e$; $f$: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
12. *h.* | $u(A)$; $u(D)$: $D$; $A$: $d$; $a$.
12. *h.* | $u(B)$; $u(C)$: $C$; $B$: $c$; $b$.
13. 5. | $d$; $a$: maior, quàm $e$; $f$.
13. 5. | $e$; $f$: maior, quàm $c$; $b$.
91. *h.* | $df$: maior, quàm $ae$.
91. *h.* | $eb$: maior, quàm $fc$.

*præpar.* Et quoniam $f$, logarithmus est rationis $C$ ad
80. *h.* $D$: ergo $df$, logarithmus est rationis $C$ ad $D$ totuplicatæ, quotus est $d$. item quoniam $e$, logarithmus est rationis $A$ ad $B$: ergo $ae$, logarithmus est rationis $A$ ad $B$ totuplicatæ, quotus est $a$. Similiter $fc$, logarithmus est rationis $C$ ad $D$ totuplicatæ, quotus est $c$: & $eb$, logarithmus, ratio-
81. *h.* nis $A$ ad $B$ totuplicatæ, quotus est $b$. Sicut ergo $ae$, minor est, quàm $df$: sic depressior est $A$ ad $B$ totuplicata, quotus est $a$, quàm $C$ ad $D$ totuplicata, quotus est $d$. Item sicut $eb$, maior est, quàm $fc$: sic $A$ ad $B$ totuplicata, quotus est $b$, altior est, quàm $C$ ad $D$ totuplicata, quotus est $c$.
*hypoth.* Sunt autem $A$ ad $B$, & $C$ ad $D$, minoris inæqua-
*def.* 1. & litatis rationes, quarum depressior altiore maior
2. 4. est. Ergo $A$ ad $B$ totuplicata, quotus est $a$, maior

ior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

*Demonſtr.* 3.

Eſto *A* minor, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *C*, *D*, *A*, *B*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitè; quarum *C*, minor, quàm *D*, & minor, quàm *A*. Et ratio *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*, maior eſt, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*. & *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*. Quod &c.

*def. 5. b. ſup.*

*Demonſtr.* 4.

Eſto *A*, maior, quàm *B*, & minor, quàm *C*. Ergo *B*, *A*, *D*, *C*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, quarum *B* minor, quàm *A*; & minor, quàm *D*. ideoque *B* ad *A* totuplicata ratio, quotus eſt *b*, maior eſt, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *c*: & *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *a*, minor, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *d*. Ergo conuertendo, *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

*def. 5. b. ſup.*

2. 3.

*Demonſtr.* 5.

Eſto *A* maior, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *D*,

*C*, *B*, *A*,

C, *B*, *A*, sunt quantitates arithmeticè dispositæ,
*def.5.h. sup.* quarum *D* minor, quàm *C*, & minor, quàm *B*. quarum ratio *D* ad *C* totuplicata, quotus est *d*, maior est, quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *a*: & *D* ad *C* totuplicata, quotus est *c*, minor,
*2. 3.* quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *b*: Ergo conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus est *d*, minor est, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *a*: & *C* ad *D* totuplicata, quotus est *c*, maior, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *b*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 93. Prop. 106.*

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, & prima minor secunda; fuerint autem & duo numeri prior ad posteriorem, minor, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est prior numerus, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata, quotus est posterior.

*Hypoth.*

Sint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, *A*, *B*, *C*, *D*: & sit *A*, minor, quàm *B*: ideoque etiam *C*, minor, quàm *D*: & sit *e* numerus ad numerum *f*, minor, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*.

Præ-

*Præpar.*

Denominetur $u$, per quantitates arithmeticè
13. b. dispositas $A$, $B$, $C$, $D$, vt fiant fractiones harmonicè dispositæ, $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$. Et esto rationis $u(A)$ ad $u(B)$, logarithmus $g$: & rationis $u(C)$ ad $u(D)$, logarithmus $h$.

*Demonstr.*

Vel $u(A)$, maior est, quàm $u(C)$; vel minor.
def. 13 b. Si $u(A)$, maior est, quàm $u(C)$: etiam $u(B)$, ma-
88. b. ior est, quàm $u(D)$: & $u(A)$ ad $u(B)$, ratio est al-
def. p. 4. tior, & maior, quàm $u(C)$ ad $u(D)$. Ergo $g$ ad $h$
104. b. non maior est, quàm vt $u(A)$ ad $u(C)$.
12. b. $u(A)$; $u(C)$: $C$; $A$.
12. b. $C$: maior, quàm $A$.
13. 5. $g$; $h$: non maior, quàm $C$; $A$.
8. 5. $D$; $A$: maior, quàm $C$; $A$.
13. 5. $g$; $h$: minor: quàm $D$; $A$.
2. 3. $f$; $e$: maior, quàm $D$; $A$.
13. 5. $g$; $h$: minor, quàm $f$; $e$.
91. b. $ge$: minor, quàm $fh$.

Est autem $g$ logarithmus rationis $u(A)$ ad
12. b. $u(B)$, vel $B$ ad $A$: ideoque $ge$, logarithmus est
80. b. rationis $B$ ad $A$ totuplicatæ, quotus est $e$. item $fh$, logarithmus est rationis $D$ ad $C$ totuplicatæ,
81. b. quotus est $f$. Ergo sicut $ge$, minor est, quàm $fh$: sic totuplicata ratio $B$ ad $A$, quotus est $e$, depressior est, quàm totuplicata $D$ ad $C$, quotus est $f$.

hypoth. | & est *B*, maior, quàm *A*, & *D* maior, quàm *C*:
def.p.4. | ergò totuplicata ratio *B* ad *A*, quotus est *e*, minor est, quàm totuplicata *D* ad *C*, quotus est *f*.
2. 3. | & conuertendo, totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

def.13.h | Si *u*(*A*), minor est, quàm *u*(*C*): etiam *u*(*B*), mi-
88. h. | nor est, quàm *u*(*D*): & est ratio *u*(*C*) ad *u*(*D*), altior, quàm *u*(*A*) ad *u*(*B*): & est *u*(*C*), maior vtralibet *u*(*D*), & *u*(*A*).
104. h. | *h*; *g*: non minor, quàm *u*(*C*); *u*(*A*).
12. h. | *u*(*C*); *u*(*A*): *A*; *C*.
13. 5. | *h*; *g*: non minor, quàm *A*; *C*.
8. 5. | *A*; *C*: maior, quàm *A*; *D*.
hypoth. | *A*; *D*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *h*; *g*: maior, quàm *e*; *f*.
91. h. | *hf*: maior, quàm *eg*.
sup. | Totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 94. Prop. 107.*

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, & prima, maior, quàm secunda: fuerint autem & duo numeri, prior ad posteriorem maior, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est prior numerus, maior, quàm tertię ad quar-

tam

tam totuplicata, quotus est posterior.

*Hypoth.*

Sint quatuor quantitates *A*, *B*, *C*, *D*, arithmeticè dispositæ: & sit *A*, maior, quàm *B*; ideoque etiam *C*, maior, quàm *D*: & sit *e* numerus ad numerum *f*, maior, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*.

*Demonstr.*

Sunt enim quatuor quantitates arithmeticè
*hypoth.* dispositæ *D*, *C*, *B*, *A*: & est *D* minor, quàm *C*:
2. 3. & *f* ad *e*, minor est, quàm vt *D* ad *A*. ergo *D*
106. *b.* ad *C* totuplicata ratio, quotus est *f*, maior est,
2. 3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *e*. Et conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *e*. Quod &c.

Quare &c.



# Perilluſt. & Excellentiſs. D. Io. Dominico Caſſino Aſtronomo D. S. Petrus Mengolus S. D.



*Vmquam mihi ſatis credo, Vir Excellentiſs. cum publicanda conſcribo; ideoque meritò nec omninò ſcholaribus credendum puto: quorum licet ope me fateor plurimùm profeciſſe; non tamen auctoritate oportuit confirmari. Tu verò, qui ſcis, & potes, tuis in me multis hucuſque poſitis, hoc addas officium velim: praua, ſi quæ ſunt, emendes primùm: in ijs, quæ malè poſita ſunt, conſilio adiuues; in cæteris, mihi duplices intellectum. Quod vt præſtes faciliùs, retexam breuiter huiuſce operis narrationem: quam cum legeris, præfationemque ad lectorem percurreris; plurima quidem curſim prætereundo intelligere; paucis verò difficilioribus lectis attentiùs, demonſtratisq́; poſſis de toto volumine ſententiam ferre.*

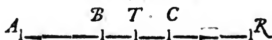
*Ante annos duodecim, occaſione cuiuſdam problematis mihi propoſiti à D. Io. Antonio Rocca Regienſi, de figura vnilinea deſcribenda, quæ ſecaret ellipſim in duobus punctis innumerabiles eiuſmodi figuras excogitaui, quas tunc per Geometriam indiuiſibilium quadrabam, adhibito tamen priùs hoc lemmate.*

*Lem-*

*Lemma.*

Data recta linea, diuisa primùm bifariam, deinde non bifariam in duobus punctis, vtrimque à medio puncto æqualiter distantibus: assignatisque vnius eiusdem gradus potestatibus abscissarum; necnon alius eiusdem gradus potestatibus residuarum: inuenire cui sit æquale aggregatum ex duobus productis synonymis, sub potestatibus abscissarũ assignatis, per suarum assignatas potestates residuarum.

Est autem hoc lemma affine illi, quod recitat Bonauentura Cauallerius b. m. præceptor meus ex Io. Beugrand: quod idcircò in expositione placet imitari.




Sit recta *AR*, diuisa bifariam in *T*, & non bifariam in punctis *C*, *B*, æqualiter hinc inde à *T* distantibus. Oportet inuenire, cui sit æquale aggregatum productorum synonymorum sub potestatibus partium inæqualium *AB*, *BR*, & *AC*, *CR*. Vt autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram Speciosam, partes *AT*, *TR*, vocantes *t*: & partes *BT*, *TC*, vocantes *a*. Erunt ergo *AB*, *CR*, $t-a$: & erunt *AC*, *BR*, $t+a$. Assignatis itaque primis potestatibus abscissarum *AB*, *AC*, necnon primis residuarum *BR*, *CR*; volens inuenire cui æquetur summa productorum sub primis potestatibus *ABR*, *ACR*, statim ducendo $t-a$ per $t+a$ produco vnum: & ducendo

A B T C R

do $t+a$ per $t-a$, produco alterum, quorum summa, $2t2 - 2a2$.

*Exemplum primum in Vniprimis.*

| | |
|---|---|
| AB: $t-a$ | AC: $t+a$ |
| BR: $t+a$ | CR: $t-a$ |
| ABR: $t2-a2$ | ACR: $t2-a2$ |
| | $t2-a2$ |

ABR+ACR: $2t2-2a2$

Vnde sequitur aggregatum productorum sub primis potestatibus ABR, ACR, ęquale esse, duplæ secundæ potestati AT, dempta dupla secunda TC.

Quod si assignatis secundis potestatibus abscissarum AB, AC, & primis residuarum BR, CR, velim scire cui æquetur summa productorum sub potestatibus secunda AB, & prima BR, & sub secunda AC & prima CR: effingo secundam potestatem à radice $t-a$, quàm duco in primam $t+a$; vt fiat vnus productus: item effingo secundam $t+a$, quàm duco in primam $t-a$; vt fiat alter productus: quorum summam inuenio $2t3 - 2ta2$.

Exem-

*Exemplum 2. in Biprimis.*

*AB*: $t^2 - 2ta + a^2$
*BR*: $t + a$

$t^3 - 2t^2a + ta^2$
$+ t^2a - 2ta^2 + a^3$

*ABR*: $t^3 - t^2a - ta^2 + a^3$

*AC*: $t^2 + 2ta + a^2$
*CR*: $t - a$

$t^3 + 2t^2a + ta^2$
$- t^2a - 2ta^2 - a^3$

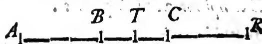
*ACR*: $t^3 + t^2a - ta^2 - a^3$
$t^3 - t^2a - ta^2 + a^3$

*ABR+ACR*: $2t^3 - 2ta^2$.

Vnde manifeſtum eſt aggregatum productorum ſub poteſtatibus, ſecunda *AB* & prima *BR*, & ſub ſecunda *AC* & prima *CR*, æquale eſſe duplæ poteſtati tertiæ *AT*, dempto duplo producto ſub prima *AT*, & ſecunda *TC*.

Similiter in cuiuslibet appellationis proportionalibus progrediendo, conſequemur optatum: vt exemplis ſubiectis liquidò apparet.

Exem-




*Exemplum 3. in Triprimis.*

$AB$: $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$
$BR$: $t + a$

$t4 - 3t3a + 3t2a2 - ta3$
$+ t3a - 3t2a2 + 3ta3 - a4$

$ABR$: $t4 - 2t3a + 2ta3 - a4$

$AC$: $t3 + 3t2a + 3ta2 + a3$
$CR$: $t - a$

$t4 + 3t3a + 3t2a2 + ta3$
$- t3a - 3t2a2 - 3ta3 - a4$

$ACR$: $t4 + 2t3a - 2ta3 - a4$
$t4 - 2t3a + 2ta3 - a4$

$ABR + ACR$: $2t4 - 2a4$.

*Exemplum 4. in Bisecundis.*

$AB$: $t2 - 2ta + a2$.
$BR$: $t2 + 2ta + a2$

$t4 - 2t3a + t2a2$
$+ 2t3a - 4t2a2 + 2ta3$
$+ t2a2 - 2ta3 + a4$.

*ABR*: $t^4 - 2t^2a^2 + a^4$

Similiter *ACR*: $t^4 - 2t^2a^2 + a^4$

*ABR+ACR*: $2t^4 - 4t^2a^2 + 2a^4$.

---

*Exemplum 5. in Quadriprimis.*

*AB*: $t^4 - 4t^3a + 6t^2a^2 - 4ta^3 + a^4$

*BR*: $t + a$

---

$t^5 - 4t^4a + 6t^3a^2 - 4t^2a^3 + ta^4$

$+ t^4a - 4t^3a^2 + 6t^2a^3 - 4ta^4 + a^5$

---

*ABR*: $t^5 - 3t^4a + 2t^3a^2 + 2t^2a^3 - 3ta^4 + a^5$

---

*AC*: $t^4 + 4t^3a + 6t^2a^2 + 4ta^3 + a^4$

*CR*: $t - a$

---

$t^5 + 4t^4a + 6t^3a^2 + 4t^2a^3 + ta^4$

$- t^4a - 4t^3a^2 - 6t^2a^3 - 4ta^4 - a^5$

---

*ACR*: $t^5 + 3t^4a + 2t^3a^2 - 2t^2a^3 - 3ta^4 - a^5$

$t^5 - 3t^4a + 2t^3a^2 + 2t^2a^3 - 3ta^4 + a^5$

---

*ABR+ACR*: $2t^5 + 4t^3a^2 - 6ta^4$.

$A \;\; B \;\; T \;\; C \;\; R$

*Exemplum 6. in Trisecundis.*

$AB: \; t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$

$BR: \; t2 + 2ta + a2$

$$t5 - 3t4a + 3t3a2 - t2a3$$
$$+ 2t4a - 6t3a2 + 6t2a3 - 2ta4$$
$$+ t3a2 - 3t2a3 + 3ta4 - a5$$

$ABR: \; t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5.$

$AC: \; t3 + 3t2a + 3a2 + a3$

$CR: \; t2 - 2ta + a2$

$$t5 + 3t4a + 3t3a2 + t2a3$$
$$- 2t4a - 6t3a2 - 6t2a3 - 2ta4$$
$$+ t3a2 + 3t2a3 + 3ta4 + a5.$$

$ACR: \; t5 + t4a - 2t3a2 - 2t2a3 + ta4 + a5$
$\phantom{ACR:} \; t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$

$ABR + ACR: \; 2t5 - 4t3a2 + 2ta4.$

*Similiter in Quintiprimis.*

$ABR + ACR: \; 2t6 + 10t4a2 - 20t2a4 - 2a6,$

In

*In Quadrisecundis.*

*ABR+ACR*: 2t6---2t4a2---2t2a4+2a6.

*In Tritertijs.*

*ABR+ACR*: 2t6---6t4a2+6t2a4---2a6.

*In Sextiprimis.*

*ABR+ACR*: 2t7+18t5a2---10t3a4---10ta6.

*In Quintisecundis.*

*ABR+ACR*: 2t7+2t5a2---10t3a4+8ta6.

*In Quadritertijs.*

*ABR+ACR*: 2t7---6t5a2+6t3a4---2ta6.

*In Septimiprimis.*

*ABR+ACR*: 2t8+28t6a2---28t2a6---2a8.

*In Sextisecundis.*

*ABR+ACR*: 2t8+8t6a2---30t4a4+8t2a6+2a8.

*In Quintitertijs.*

*ABR+ACR*: 2t8---4t6a2+4t2a6---2a8.

*In Quadriquartis.*

*ABR+ACR*: 2t8---8t6a2+12t4a4---8t2a6+2a8.

*In Octauiprimis.*

*ABR+ACR*: 2t9+40t7a2+28t5a4---56t3a6---14ta8.

*In Septimisecundis.*

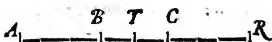
*ABR+ACR*: 2t9+16t7a2---28t5a4+10ta8.

*In Sextitertijs.*

*ABR+ACR*: 2t9---12t5a4+16t3a6---6ta8.

*In Quintiquartis.*

*ABR+ACR*: 2t9---8t7a2+12t5a4---8t3a6+2ta8.




*In Noniprimis.*

*ABR+ACR:* 2t10 + 54t8a2 + 84t6a4 — 84t4a6 — 54t2a8 — 2a10.

*In Octauisecundis.*

*ABR+ACR:* 2t10 + 26t8a2 — 28t6a4 — 28t4a6 + 26t2a8 + 2a10.

*In Septimitertijs.*

*ABR+ACR:* 2t10 + 6t8a2 — 28t6a4 + 28t4a6 — 6t2a8 — 2a10.

*In Sextiquartis.*

*ABR+ACR:* 2t10 — 6t8a2 + 4t6a4 + 4t4a6 — 6t2a8 + 2a10.

*In Quintiquintis.*

*ABR+ACR:* 2t10 — 10t8a2 + 20t6a4 — 20t4a6 + 10t2a8 — 2a10.

*Propositio.*

In parallelogrammo ducta diametro, regula basi: omnes sexcuplæ vniprimæ sub triangulis, sunt æquales omnibus secundis potestatibus parallelogrammi.

Et omnes duodecuplæ biprimæ, omnibus tertijs potestatibus parallelogrammi.

Et omnes 20plæ triprimæ: necnon omnes 30plæ bisecundæ; omnibus quartis potestatibus.

Et

Et omnes 30plæ quadriprimę: necnon omnes 60plæ trisecundæ; omnibus quintis potestatibus.

Et omnes 42plę quintiprimę: item omnes 105 plę quadrisecundæ: & omnes 140plæ tritertiæ; omnibus sextis potestatibus.

Et omnes 56plæ sextiprimæ: item omnes 168plę quintisecundæ: item omnes 280plæ quadritertiæ; omnibus septimis potestatibus.

Et omnes 72plæ septimiprimæ: item omnes 252plæ sextisecundæ: necnon omnes 504plæ quintitertiæ: & omnes 630plæ quadriquartæ; omnibus octauis potestatibus.

Et omnes 90plę octauiprimæ: & omnes 360plæ septimisecundę: & omnes 840plæ sextitertiæ: & omnes 1260plæ quintiquartæ; omnibus nonis potestatibus.

Et omnes 110plæ noniprimæ: & omnes 495plæ octauisecundæ: & omnes 1320plæ septimitertiæ: & omnes 2310plæ sextiquartæ: & omnes 2772plæ quintiquintæ; omnibus decimis potestatibus.

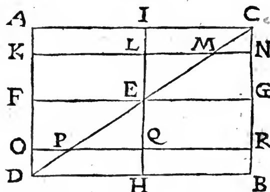
Et sic deinceps in infinitum iuxta numeros tabulę quadratricum, vel quadraturarum, cõtinuatę quãtùm oportet.

*Meth. Demonstr.*

Affinis est hæc propositio, tribus propositionibus, quas loco citato refert Cauallerius ex eodem Beugrand *Exerc.* 4. *prop.* 25, 26, *&* 27: Eademque illarum methodo demonstrabitur, ex Lemmate præcedenti. Porrò satis puto ad ostensionem eiusdem methodi, ex decem propositis, tria tantùm demonstrare.

Hy-

*Hypoth.*




Esto parallelogrammum *AB*, cuius diameter *CD*: diuidaturque *CD* bifariam in *E*: ducanturque per *E*, rectæ *FG*, *IH*, parallelogrammi *AB* lateribus parallelę: ducanturque hinc inde ab *E* distantes quantumlibet, sed æqualiter, & intra quadratum, duæ *K L M N*, & *O P Q R*.

Dico sub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes sextuplas vniprimas, æquales esse, omnibus secundis potestatibus parallelogrammi *AB*.

*Demonstr. p.*

Quoniam aggregatum ex vniprimis *KMN*, *OPR*, est æquale duplæ secundę potestati *KL*, dempta dupla secunda potestate *LM*: & *KN* ducta est vtcunque. Ergo ex omnibus vniprimis, sub trapezio *AFEC*, & sub triangulo *CEG*, & ex omnibus, sub triangulo *EFD*, & sub trapezio *EDBG*, aggregatum; quod est omnes vniprimæ

mæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*: eſt æquale omnibus duplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AE*, demptis omnibus duplis ſecundis poteſtatibus trianguli, *IEC*; ideſt omnibus ſimplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus ſecundis poteſtatibus, vtrorumq; triangulorum *IEC*, *DEH*.

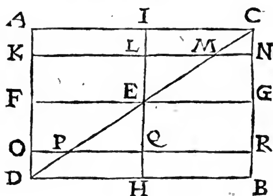
Sed qualium trianguli *IEC* omnes ſecundę poteſtates, ſunt vnitas: talium parallelogrammi *AE*, ſunt 3. Ideoq; qualium omnes ſecundæ poteſtates triangulorum *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AH*, ſunt 6. Et omnes vniprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes ſexcuplæ vniprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 24. Item qualium omnes ſecundæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes ſecundæ poteſtates *AB*, ſunt 24. Ergo omnes ſextuplæ vniprimę, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt ęquales, omnibus ſecundis poteſtatibus *AB*. Quod &c.

Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes duodecuplas biprimas, æquales eſſe, omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

*Demonſtr. 2.*

Quoniam aggregatum ex biprimis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ tertiæ poteſtati *KL*, dempta dupla vniſecunda *KLM* (ideſt, dempto duplo producto ſub poteſtatibus, prima *KL*, & ſecunda *LM*). Oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quòd omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*,

ſunt




ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus vniſecundis ſub poteſtatibus primis eiuſdem *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt vnitas: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi ſunt 3: ideoque qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AE*, & ſub triangulo *IEC*, ſunt ſunt vnitas: talium omnes tertiæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 3. & qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AH*, & ſub vtriſque triangulis *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: & omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes duodecuplę biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 48. item qualium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes tertiæ

tiæ poteſtates *AB*, ſunt 48. Ergo omnes duodecuplæ biprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus *AB*. Quod &c.

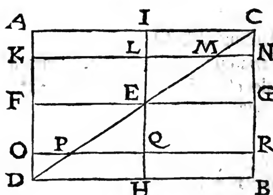
Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes 6oplas triſecundas, æquales eſſe, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

*Demonſtr.* 3.

Quoniam aggregatum ex triſecundis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ quintæ poteſtati *KL*, dempta quadrupla triſecunda *KLM*, addita dupla vniquarta *KLM*. oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quod omnes triſecundæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AH*; demptis omnibus duplis triſecundis, ſub poteſtatibus tertijs *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*, additis omnibus vniquartis ſub poteſtatibus primis *AH*, & ſub quartis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15. ideoque qualium omnes tr ſecundæ ſub tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AE*, & ſub ſecundis trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes quintæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15: atque talium omnes duplæ triſecundæ ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 10: atque differentia vtrarumque, eſt 5.

Rurſum, qualium omnes quartæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 3: talium omnes quartæ poteſtates *AE*, ſunt




15. ideoque qualium omnes vniquartæ, ſub primis, *AE*, & quintis *IEC* poteſtatibus, ſunt 3: talium omnes quintæ poteſtates *AE*, ſunt 15. ſed talium oſtenſæ ſunt omnes quintæ *AE*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, eſſe 5: ergo additis omnibus vniquartis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 8.

Sed qualium omnes quintæ *AE*, ſunt 15: talium omnes quintæ *AH* ſunt 30: & omnes quintæ *AH*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, additiſque omnibus vniquartis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, ſunt 16; nempe omnes triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 16: & omnes 60plæ triſecundæ ſub ijſdem, ſunt 960. & qualium omnes quintæ poteſtates *AH*, ſunt 30: talium omnes quintæ poteſtates *AB*, ſunt 960. Ergo omnes 60plæ triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*. Quod &c. Quare &c.

*His*

*His demonstratis, cogitabam si possent aliæ quadraturæ inueniri ex inuentis compositæ, in quas insignis aliqua resoluatur; quemadmodum in triangula, parabolam Archimedes resoluit. Et quæsiui primum de omnibus figuris, in quibus ordinatæ ad basim, sunt omnes potestates abscissarum, primæ, secundæ, tertiæ, & deinceps in infinitum: quas ex demonstratis à Cauallerio loco citato, deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab vnitate: earumque summam demonstraui excrescere in infinitum, in præfatione ad meum libellum, cui titulus, Nouæ Quadraturæ Arithmeticæ, seu de Additione Fractorum.*

*Deinde tentaui, si possent in vnam colligi summam figuræ, in quibus ordinatæ ad basim, sunt abscissæ primæ, & producti sub primis abscissis, & residuarum potestatibus omnifariam, idest, abscissæ primæ, vniprimæ, vnisecundæ, vnitertiæ, vniquartæ, & deinceps in infinitum: quas colligere mihi successit fœliciter, & æquales inuenire parallelogrammo, cuius ad eamdem basim ordinatæ, sunt omnes totæ; vt potest facilè colligi ex supra demonstratis, & ex 17. p. Nou. Quadr.*

*Item si possent colligi figuræ, in quibus ordinatæ ad basim sunt abscissæ secundæ, & producti sub abscissis secundis, & residuarum potestatibus omnifariam, idest, abscissæ secundæ, biprimæ, bisecundæ, bitertiæ, biquartæ, & deinceps in infinitum: quas etiam colligere mihi successit, & æquales inuenire triangulo, cuius ordinatæ sunt omnes abscissæ: vt patet ex supra demonstratis, & ex 8. 2. Nou. Quadr.*

*Et generaliter inueni figuram, in qua ordinatæ sunt omnes potestates abscissarum, & deinceps omnes figuras, in quibus ordinatæ*

*natæ ſunt productæ ſub ijſdem poteſtatibus abſciſſarum, & ſub reſiduarum poteſtatibus omnifariam, ſimul aggregatas, æquales eſſe figuræ, in qua ordinatæ, ſunt omnes poteſtates abſciſſarum ordinis proximè inferioris. Verbi gratia, omnes abſciſſas tertias, additis omnibus triprimis, omnibus triſecundis, omnibus tritertijs, alijſque omnibus triquotis; eſſe æquales, omnibus abſciſis ſecundis. Item omnes abſciſſas quartas, additis omnibus quadriprimis, omnibus quadriſecundis, omnibus quadritertijs, omnibus quadriquartis, alijſque omnibus quadriquotis; eſſe æquales omnibus abſciſis tertijs, quod ita generaliter vt enunciatum eſt, & ex ſupra demonſtratis, & ex 5. 3. Nou. Quadr. poteſt manifeſtari.*

*Ipſam interim acceſsionem, quam Geometriæ Indiuiſibilium feceram, præteriui: veritus eorum authoritatem, qui falſum putant ſuppoſitum, omnes rectas figuræ planæ infinitas, ipſam eſſe figuram planam: non quaſi hanc ſequens partem; ſed illam quaſi non prorſus indubiam deuitans: tentandi animo, ſi poſſem demum eandem indiuiſibilium methodum, aut aliam æquiualentem nouis, & indubijs prorſus conſtituere fundamentis.*

*Mechanicis deinde ac Muſicis hucuſque imperfectis occupatus lucubrationibus, in eas quandoque veni demonſtrandarũ concluſionum anguſtias, vt per omnifariam hæc noſtra elementa, nouorum indigerem argumentorum. quæ priuatis tradita ſcriptis deliteſcebant, non inculta ſolùm, ſed & ita perperam poſita, vt quaſi ſpecialia Lemmata quorumdam mathematum, non valerent ad aliud. Animaduertebam etiam me non poſſe multùm in Mechanicis proficere, quas liberaliter profiteor; niſi ex vberiore*

Geo-

*Geometria, quàm quæ hucusque ab Euclide, Apollonio, alijsque posterioribus tradita esset.*

*Nuperrimè hoc anno, Adm. R. P. Fr. Stephanus de Angelis Iesuattus, meus condiscipulus, de indiuisibilium Præceptoris nostri Geometria omnium optimè meritus, cuius intellectus copiam, & fœlicitatem, nunquam satis à me cõmendari posse verbis existimo, mittebat ad me libellum suum De Infinitis Parabolis &c. legendum: cuius ex eruditione mirabili, melior, & vegetior factus Geometra; maximum hoc emolumentum percepi: vt præterita studia reuerterentur in mentem; ordinemque, inter plura deinceps inuenta, postularent. & illud tandem mihi, opinor, successisse fœliciter, quod duodecim ante annos desideraueram: ijs etiam, quibus deuincior, Mechanicorum studiorum obligationibus oportunum. super qua mea opinione, Vir Excellentissime, hisce lucubrationibus perlectis; & quatenus oportuerit ad correctionem notatis: tuam sinceram enixè rogans, postulo, & expecto sententiam. Vale.*



*Ta-*

*Tabula Formosa.*

*FO.u.*
*FO.a. FO.r.*
*FO.a2. FO.ar. FO.r2.*
*FO.a3. FO.a2r. FO.ar2. FO.r3.*
*FO.a4. FO.a3r. FO.a2r2. FO.ar3. FO.r4.*

*Tabula Subquadraturarum.*

*FO.u.*
*FO.a. FO.r.*
*FO.a2. FO.2ar. FO.r2.*
*FO.a3. FO.3a2r. FO.3ar2. FO.r3.*
*FO.a4. FO.4a3r. FO.6a2r2. FO.4ar3. FO.r4.*

*Tabula Quadraturarum.*

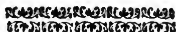
*FO.u.*
*FO.2a. FO.2r.*
*FO.3a2. FO.6ar. FO.3r2.*
*FO.4a3. FO.12a2r. FO.12ar2. FO.4r3.*
*FO.5a4. FO.20a3r. FO.30a2r2. FO.20ar3. FO.5r4.*

GEO-

# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

## ELEMENTVM SEXTVM.

### DEFINITIONES.



1 ASsumatur inter lineas, vna quælibet quantitas; quæ, Rationalis, dicetur.

2 Et exponatur quædam recta linea, rationali æqualis; quæ dicetur, Tota:

3. Sitque data positione; quæ dicetur, Basis.

4. Eiusqne alterum extremorum punctorum, dicetur, Finis abscissarum.

5. Alterum, Finis residuarum.

6. Et ab vnoquoque puncto in basi sumpto, vsque ad finem abscissarum, quatenus ipsa basis extenditur, quantitas dicetur Abscissa.

7. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima abscissarum.

8. Item ab vnoquoque puncto in basi sumpto, vsque ad finem residuarum, quatenus basis extenditur, quantitas dicetur Residua.

9. Ideo-

9. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima residuarum.

10. Super basi describatur quadratum: & ab vno quolibet puncto in basi sumpto, recta ducatur, vsque ad oppositum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quæ dicetur, Ordinata in quadrato.

11. Quæ cum sit æqualis rationali, & totę; dicetur Rationalis, & Tota, & Maxima abscissarum, & Maxima residuarum.

12. Et quadratum, per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes rationales, & Forma omnes totæ. & significabitur characteribus *FO.u*, & *FO.t*.

13. Immò quoniam tota est æqualis rationali, & reliquæ omnes potestates totę, sunt inter se, & rationali æquales: ordinata in quadrato dicetur etiam, Tota secunda, Tota tertia, Tota quarta, & deinceps.

14. Et quadratum, dicetur, Forma omnes totæ secundæ, Forma omnes totæ tertiæ, Forma omnes totæ quartę. aptisque significabitur characteribus, *FO.t2*, *FO.t3*, *FO.t4*. & sic deinceps.

15. A fine abscissarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius ab vnoquolibet puncto in basi sumpto recta ducatur, vsque ad prædictam diametrum, alteri lateri parallela, quæ dicetur, Ordinata in triangulo.

16. Quæ cum sit æqualis abscissæ, dicetur, Abscissa.

17. Ipsumque triangulum per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes abscissæ. & significabitur charactere, *FO.a*.

18. Si-

18. Similiter à fine residuarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius vnaquęlibet ordinata, cum sit æqualis residuæ, dicetur Residua.

19. Et per ordinatas residuas extensum triangulum, dicetur, Forma omnes residuæ. & significabitur charactere, *FO.r.*

20. Si super basi concipiatur figura extensa non nisi per ordinatas in quadrato: sed in qua, vnaquælibet ordinata, est abscissa secunda, dicetur, Forma omnes abscissæ secundæ. & significabitur charactere *FO.a2.*

21. Item, in qua, vnaquælibet ordinata, est vniprima, dicetur, Forma omnes vniprimæ. & significabitur charactere, *FO.ar.*

22. Et in qua, vnaquælibet ordinata, est residua secunda, dicetur Forma omnes residuæ secundæ. & significabitur charactere, *FO.r2.*

23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato: & in qua, vnaquęlibet ordinata, est assumpta quædam in tabula proportionalium: dicetur, Forma omnes tales proportionales. aptoque significabitur charactere. vt Forma omnes abscissæ tertiæ, *FO.a3*: Forma omnes biprimę, *FO.a2r*: Forma omnes vnisecundæ, *FO.ar2*: Forma omnes residuæ tertiæ, *FO.r3*. & sic deinceps.

24. Itaque ad instar tabulæ proportionalium, & specierum, alia tabula ordinabitur formarum, quæ dicetur, Formosa.

25. Quod si vna quælibet ordinata in forma, est assumpta quædam in tabula nominum: dicetur, Forma omnes totuplæ tales proportionales, aptoque significabitur charactere. vt, Forma omnes duplæ vniprimæ, *FO.2ar*: Forma omnes triplæ biprimæ, *FO.3a2r*: Forma omnes triplæ vnisecundæ, *FO.3ar2*. & sic deinceps.

26. Ideoque ad instar tabulæ nominum, & subquadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula subquadraturarum.

27. In qua digestæ formæ, dicentur, Subquadraturæ.

28. Item ad instar tabulæ quadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula Quadraturarum.

29. In qua digestæ formæ, dicentur, Quadraturæ.

30. Denique si vnaquælibt ordinata, in forma, est assumptæ proportionalis multipla, vel submultipla, vel multiplæ submultipla: dicetur, Forma omnes totuplæq; tales proportionales, vel subtotuplæ, vel totuplarum subtotuplæ. aptisque significabitur characteribus. vt Forma omnes quintuplæ bitertiæ, *FO.5a2r3*: & Forma omnes biprimæ subtriplæ, *FO.a2r(3)*: & Forma omnes quadruplæ triquartæ subseptulæ, *FO.4a3r4(7)*. & sic deinceps.

31. Si basis diuisa fuerit in partes æquales; ductæque fuerint per extrema & media diuisionum puncta parallelæ ordinatæ in forma; & super partibus basis æqualibus, inter parallelas completa fuerint parallelogramma maxima intra formam iacentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Inscripta formæ.

32. Quod

32. Quod si completa fuerint parallelogramma minima formam includentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Circumscripta formæ.

33. Figura vero ex tot parallelogrammis, quot sunt ordinatæ per puncta diuisionum, & ad ipsas ordinatas iacentibus composita, dicetur, Adscripta formę.

34. Speciosa, & Formosa tabulis congruentibus, Massæ, & Formæ, quarum in vtrisque sunt eędem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymę.

35. Item Homonymarum æquemultiplices, dicentur Homonymæ.

36. Ideoque etiam in duabus subquadratricum, & subquadraturarum, aut quadratricum, & quadraturarum tabulis, Massæ, & Formæ, dicentur Homonymę.



*Theor. 1. Prop. 1.*

TAbulæ formosæ primi lateris, in tertia, quarta, & reliquis deinceps formis, in singulis ordinatæ, pro maioribus abscissis, sunt maiores; & pro maxima abscissarum, est maxima, & ipsi basi æqualis: item vltimi lateris in formis, pro maioribus residuis, sunt maiores; & pro maxima residuarum, est maxima, & ipsi basi æqualis.

*Hypoth.*




Esto basis *AR*: in qua finis abscissarum, *A*; finis residuarum, *R*. & sint abscissæ, *AB* minor, *AC* maior, *AR* maxima; & residuæ, *RC* minor, *AB* maior, *RA* maxima: & esto in primo latere tabulæ formosæ, tertia *FO.a2*; & in vltimo, tertia *FO.r2*.

Dico in *FO.a2*, ordinatam per *C*, maiorem esse ordinata per *B*: & per *R*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *AR*.

Item in *FO.r2*, ordinatam per *B*, maiorem esse ordinata per *C*: & per *A*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *RA*.

*Demonstr.*

Basis *RA*, ad ordinatam per *B*, duplicatam habet rationem eius, quàm habet ad *AB*: & ad ordinatam per *C*, duplicatam eius, quàm habet ad *AC*: *def. 20h*

*AC:*

AC: & ad ordinatam per R, duplicatam æqualitatis, quàm habet ad AR. Sed RA ad AB, maior est, quàm vt ad AC: & ad AC, maior, quàm
4. 3. vt æqualis ad AR. Ergo ad ordinatam per B, maior est, quàm vt ad ordinatam per C: & ad ordinatam per C, maior, quàm vt ad ordinatam per R. Ergo ordinata per B, minor est, quàm quæ per C: & vtralibet per B, & per C, minor, quàm quæ per R: & ordinata per R, est maxima; ad quàm RA duplicatam habet rationem æqualitatis, nempe eamdem habet æqualitatis rationem: ergo per R ordinata, est ipsi AR æqualis. Quæ &c.

Simili prorsus demonstratione ostendetur, quòd in FO.r2, ordinata per B, maior est, quàm quæ per C: & vtralibet per B, & per C, minor, quàm quæ per A: & per A ordinata est maxima, & ipsi AR æqualis. Quę &c.

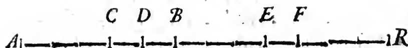
Quare &c.

*Theor. 2. Prop. 2.*

IN singulis formosæ tabulę, non primi, nec vltimi lateris formis, ordinatarum maxima, minor est, quàm tota: & facit abscissam, & residuam, proportionales, vt numeri, à quibus ipsa forma denominatur: reliquarum verò ex vtralibet parte, propior maximę remotiore maior est.

Hy-

*Hypoth.*




Esto basis *AR*; in qua, finis abscissarum, *A*; finis residuarum *R*: & esto in tabula formosa, non in primo, nec in vltimo latere, forma omnes bitertiæ, quàm denominant numeri 2, 3, cuius character, *FO.a2r3*. & diuidatur *AR* in *B*, vt abscissa *AB*, ad residuam *BR* sit proportionalis, sicut 2 ad 3: sumanturque aliæ abscissæ minores, quàm *BA*, nempe *DA*, *CA*: & aliæ residuæ minores, quàm *BR*, nempe *ER*, *FR*.

Dico in *FO.a2r3*, ordinatam per *B* minorem esse, quàm *AR*; & ordinatarum esse maximam: & ordinatam per *D*, maiorem esse, quàm quæ per *C*: & ordinatam per *E*, maiorem, quàm quæ per *F*.

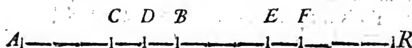
*Demonstr.*

6. p. Rationalis *u*, ad *a2r3*, rationem habet compositam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*: idest

def. 8. p. compositam ex duplicata *u* ad *a*, & ex triplicata *u* ad *r*. Est autem *AR* ad *AB*, vt *u* ad *a*: & *AR* ad *BR*, vt *u* ad *r*: & ad ordinatam per *B*, est vt *u* ad *a2r3*. Ergo *AR* ad ordinatam per *B*, habet rationem compositam ex rationibus, duplicata *AR* ad *AB*, atque triplicata *AR* ad *RB*. Sed *AR* ad *AB*, & *AR* ad *RB*, sunt maioris inæqualitatis

litatis rationes, quæ tùm multiplicatæ, tùm compositæ, faciunt maioris inæqualitatis rationem. Quare *AR* maior est, quàm ordinata per *B*. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione ostendetur, quod ordinata per *D* ad *AR*, habet rationem compositam ex duplicata *AD* ad *AR*, & ex triplicata
p. p. *DR* ad *AR*. Ergo ex æquali, ordinata per *D* ad ordinatam per *B*, rationem habet compositam ex duplicata *DA* ad *AB*, & ex triplicata *DR* ad
def. 5. 5. *RB*. Sunt autem *DA*, *AB*, *BR*, *RD*, quatuor arithmeticè dispositæ, quarum secunda *AB* ad
105. 5. tertiam *BR* est vt 2 ad 3. Ergo duplicata ratio *DA* ad *AB* minor est, quàm triplicata *BR* ad
3. p. *RD*. Habet autem secunda potestas *DA* ad secundam *AB* duplicatam rationem eius, quàm habet *DA* ad *AB*: & tertia potestas *BR* ad tertiam *RD* triplicatam *BR* ad *RD*. Ergo secunda potestas *DA* ad secundam *AB* minor est, quàm vt
91. 5. tertia potestas *BR* ad tertiam *RD*: ergo productus sub secunda potestate *AD*, & sub tertia *DR*, minor est producto, sub secunda *AB*, & sub tertia
8. 5. *BR*. Sed productus sub secunda potestate *AD*, & sub tertia *DR*, ad productum sub secunda *AB*, & sub tertia *BR*, compositam habet ex rationibus secundæ potestatis *AD* ad secundam *AB*, & tertiæ *DR* ad tertiam *BR*: nempe compositam ex duplicata *AD* ad *AB*, & triplicata *DR* ad *RB*:




RB: nempe eamdem quàm ordinata per D ad ordinatam per B. Ergo ordinata per D, minor eſt quàm ordinata per B. Similiter oſtendetur, quòd & ordinatæ per E, per C, per F, ſingulæ ſunt minores, quàm ordinata per B. Ergo ordinata per B eſt maxima. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quod ordinata per C ad ordinatam per D, eſt vt productus ſub ſecunda poteſtate AC, & ſub tertia CR, ad productum ſub ſecunda AD, & ſub tertia DR: & quod rationem habet compoſitam ex rationibus, duplicata CA ad AD, & triplicata CR ad RD. Sunt autem DA, AC, CR, RD, quatuor arithmeticè diſpoſitæ quarum DA maior eſt, quàm AC: & ſunt duo numeri 2 ad 3, vt AB ad BR, maiorem ſcilicet rationem habentes, quàm
107. 5. AD ad DR. Ergo maior eſt DA ad AC dupli-
2. 3. cata ratio, quàm CR ad RD triplicata: & è conuerſo minor eſt CA ad AD duplicata, quàm
3. p. DR ad RC triplicata: & minor eſt ſecunda poteſtas CA ad ſecundam AD, quàm vt poteſtas ter-
91. 5. tia DR ad tertiam RC: & minor eſt productus ſub ſecunda poteſtate AC, & ſub tertia CR, quàm ſub ſecunda poteſtate AD, & ſub tertia DR: & minor

minor eſt ordinata per *C*, quàm ordinata per *D*. Similiter oſtendetur, quòd ordinata per *F*, minor eſt, quàm ordinata per *E*. Quod &c.

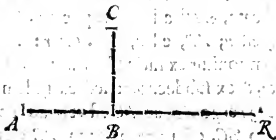
Quare &c.

---

*Probl. 1. Prop. 3.*

FOrmæ propoſitæ, in data baſi, per datum punctum, ordinatam inuenire.

*Hypoth.*



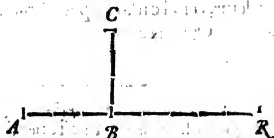

Eſto propoſita *FO.1042r3*, ſuper data baſi *AR*, in qua datum punctum *B*.

Oportet per *B* ordinatam inuenire.

*Conſtr.*

Data *AR*, datiſque *AB*, *BR*, inueniatur recta *BC*, ad quàm *AR*, rationem habet compoſitam ex datis rationibus, *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ratione ſubdecupla: & collocetur *BC* perpendiculariter ad *AR*.

Dico *BC*, eſſe ordinatam per *B*, in *FO.1042r3*.




*Demonstr.*

Ratio *AR* ad *BC*, componitur ex rationibus *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex subdecupla: sed *AR*, est *u*; *AB*, est *a*; *BR*, est *r*: Ergo *AR* ad *BC* ratio, componitur ex rationibus *u* ad *a* duplicata, *u* ad *r* triplicata, & ex subdecupla: sed ex ijsdem componitur *u* ad 10*a*2*r*3: ergo *AR* ad *BC* est vt *u* ad 10*a*2*r*3: Sed *AR* est *u*: ergo *BC*, est 10*a*2*r*3: ergo *BC* est ordinata per *B*, in *FO*.10*a*2*r*3. Quod &c.

Quare &c.

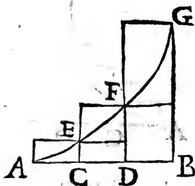
---

*Probl. 2. Prop. 4.*

SVper data basi propositæ formæ primi vel vltimi lateris, per datum numerum diuisa in partes æquales, tres figuras ex parallelogrammis describere, inscriptam, circumscriptam, & adscriptam: & ostendere, quòd inscripta & adscripta sunt æquales: & quòd circumscripta excedit inscriptam quantitate rectanguli sub maxima ordinata, & sub vna æqualium basis partium.

*Hy-*

*Hypoth.*



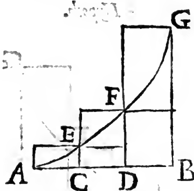

Esto propositæ formæ data basis *AB*, diuisa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DB*.

Oportet describere inscriptam, circumscriptam, & adscriptam.

*Constr.*

p. h. | Assumatur alterum extremorum *A*, *B*, nempe
3. h. | *B*, per quod ordinata est maxima: & inueniantur ordinatæ per data puncta *C*, *D*, *B*, rectæ *CE*, *DF*, *BG*: & compleantur parallelogramma *ED*, *FB*, *AE*, *CF*, *DG*.

Dico inscriptam esse ex *DE*, *BF*: circumscriptam, ex *AE*, *CF*, *DG*: adscriptam, ex *AE*, *CF*, vel ex *DE*, *BF*: & adscriptam inscriptæ æqualem esse: & circumscriptam excedere inscriptam quantitate rectanguli *DG*.




*Demonstr.*

p. h. Ordinatarum per omnia *BD* puncta, maxima est per *B*, minima per *D*: ergo parallelogrammorum inter ordinatas per *D*, & *B*, intra propositam formam iacentium, maximum est *BF*; & includentium formam, minimum est *DG*: excedit autem *DG*, ipsum *FB*, spatio *FG*. Similiter ostendetur, parallelogrammum inter ordinatas per *C*, & *D*, infra propositam formam iacentium, maximum esse *DE*; & includentium formam, minimum esse *CF*: excedit autem *CF*, ipsum *DE*,

p. h. spatio *EF*. Item quoniam *CE*, maxima est ordinatarum per omnia *AC* puncta; per *A* verò nulla est ordinata: ergo parallelogammorum, inter ordinatam per *C*, & eius parallelam per *A*, includentium formam, minimum est *AE*; nullum verò

def.31b est, intra formam iacentium. Ergo inscripta est,

ex

def.32b ex *DE*, *BF* compoſita: & circumſcripta, ex *AE*, *EF*, *DG* compoſita: & excedit circumſcripta inſcriptam ſpatio ex *AE*, *EF*, *FG* parallelogrammis compoſito. Sed ex *AE*, *EF*, *FG* compoſitum ſpatium parallelogrammo *DG* eſt æquale. ergo excedit circumſcripta inſcriptam quantitate *DG*. Et quoniam *CE*, *DF*, ſunt ordinatę per diuiſionum puncta *C*, *D* quibus totidem adiacent parallelogramma, vel *AE*, *CF*, vel *DE*, *BF*.
def.33b Ergo adſcripta eſt ex *DE*, *BF*, vel ex *AE*, *CF*. ſunt autem *AE*, *CF*, ipſis *DE*, *BF* æqualia, ex quibus componitur inſcripta. Ergo adſcripta eſt æqualis inſcriptæ. Quæ &c.

Quare &c.

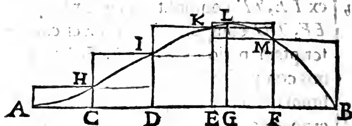
---

*Probl. 3. Prop. 5.*

SVper data baſi propoſitæ formæ non primi neque vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes ęquales; tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quod circumſcripta excedit adſcriptam, quantitatę rectanguli ſub maxima ordinatarum, & ſub vna æqualium baſis partium: & quod adſcripta excedit inſcriptam, non maiori quantitate.

*Hypoth.*

Eſto propoſitæ formæ data baſis *AB*, diuiſa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FB*: & eſto *A*, finis abſciſſarum; & *B*, finis reſiduarum. Opor-




Oportet deſcribere inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam.

*Conſtr.*

Aſſumantur numeri denominantes formam propoſitam, ſecundum quos diuidatur *AB* in partes proportionales in *G*, vt abſciſſa *AG*, ad reſiduam *GB*, ſic ſe habeat, ſicut denominantium numerorum prior ad poſteriorem. Conſtat per *G* punctum, eſſe maximam ordinatam. Inueniantur per *C*, *D*, *E*, *G*, *F*, ordinatæ *CH*, *DI*, *EK*, *GL*, *FM*; & eſto *MF*, minor, quàm *EK*: & compleantur parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*, *HD*, *IE*, *EM*, *KF*.

2. *b*.
3. *b*.

Dico inſcriptam eſſe ex *HD*, *IE*, *EM*: circumſcriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*: adſcriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: & circumſcriptam excedere adſcriptam, quantitate rectanguli *ELF*: & adſcriptam excedere inſcriptam non maiori, quàm rectanguli *ELF* quantitate.

De-

*Demonstr.*

2. h. Ordinatarum per omnia *BF* puncta, maxima est per *F*, nulla per *B*: ergo inter ordinatam per *F*, & parallelam per *B*, minimum parallelogrammorum includentium formam est *MB*, ideoque ad circumscriptam pertinens figuram: nullum verò est intra formam iacentium. Item ordinatarum per omnia *EF* puncta maxima est per *G*; & per *F*, minor, quàm quæ per *E*, est minima: & inter ordinatas *EK*, *FM* minimum parallelogrammorum includentium formam, est *ELF*, & intra formam iacentium maximum *EM*; ideoque ad circumscriptam pertinet *ELF*; ad inscriptam verò *EM*. Similiter ostendetur, quod *DK*, *CI*, *AH* pertinent ad circumscriptam; & *HD*, *IE* ad inscriptam. Quare inscripta est ex *HD*, *IE*, *EM*: & circumscripta *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*. Et quoniam *CH*, *DI*, *EK*, *FM* sunt ordinatæ, quibus adiacent parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: manifestum est adscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB* compositam esse. Excedit autem circumscripta adscriptam spatijs, *AH*, *HI*, *IK*, & excessu *ELF*, supra *KF*; vel spatijs *KLM*, *MB*: quæ vtralibet sunt æqualia vni rectangulo *ELF*: excedit ergo circumscripta adscriptam, quantitate rectanguli *ELF*. Adscripta vero excedit inscriptam spa-

def.32b

def.31b

def.33b

ſpatijs *AH, HI, IK*; vel ſpatijs *KM, MB*: quæ vtralibet non maiora ſunt rectangulo *ELF*: excedit ergo adſcripta inſcriptam, non maiori quantitate, quàm ſit *ELF*. Quę &c.
Quare &c.

---

*Probl. 4. Prop. 6.*

INuenire numerum, per quem propoſitæ formæ datæ baſis diuidatur, vt circumſcripta, & inſcripta ſint propiores æqualitati, quàm in data ratione inæqualitatis.

*Hypoth.*

Eſto data baſis *B*, dataque ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Oportet numerum inuenire, per quem cum diuiſa fuerit *B*, & figuræ circumſcripta & inſcripta deſcriptæ fuerint, circumſcripta ad inſcriptam, minor ſit, quàm vt *c* ad *d*.

*Conſtr.*

Aſſumatur quilibet numerus, per quem diui-
5. *h*. datur *B*: & inſcripta deſcribatur figura *E*: & inueniatur quantitas *F*, ad quàm *E*, maior eſt,
2. *h*. quàm vt *c* ad *c---d*. Aſſignetur etiam, in ipſa *B*,
3. *h*. punctum: per quod maxima ordinatarum inueniatur *G*: & ad *G* applicetur quantitas *F*, vt fiat latitudo *H*: & ſumatur ipſius *H* multiplex *L*, maior quàm dupla *B*: & quotuplex eſt *L* ad *H*, totus numerus eſto *M*.

Dico *M*, eſſe numerum, per quem, cum diuiſa fuerit *B*; & figuræ circumſcripta, & inſcripta, fuerint deſcriptæ: cir-

circumſcripta ad inſcriptam minor eſt, quàm vt *c* ad *d*.

*Præpar.*

Quotus eſt *M*, tota pars ipſius *B* accipiatur
5. b. *N*. & diuiſa baſi per numerum *M*, ſit inſcripta
figura *Q*, circumſcripta *R*, adſcripta *S*.

*Demonſtr.*

2. p. Quoniam *B* ad *N*; eſt vt *M* ad vnitatem, vel
vt *L* ad *H*: permutando *B* ad *L*, eſt vt *N* ad
1. p. *H*: & 2*B* ad *L*, vt 2*N* ad *H*. Sed 2*B*, minor
eſt, quàm *L*: ergo 2*N*, minor eſt, quàm *H*: ergo 2*GN* rectangulum, minus eſt rectangulo *GH*.
ſed rectangulum *GH*, eſt æquale ipſi ſpatio *F*: ergo 2*GN*, minus eſt, quàm *F*. Et eſt *E* ad 2*GN*,
ratio maior, quàm *E* ad *F*. Sed *E* ad *F* ratio,
maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*: ergo *E* ad 2*GN*
ratio, maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*. Eſt autem *R*, maior, quàm *E*: ergo *R* ad 2*GN* ratio, maior eſt,
5. b. quàm *c* ad *c*---*d*. Eſt autem *R*---*S*, ęqualis ipſi
*GN*: & *S*---*Q*, non maior eſt, quàm 2*GN*: ergo *R* ad *R*---*Q*, maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*:
3. 3. ergo, per conuerſionem rationis, *R* ad *Q*, minor eſt, quàm vt *c* ad *d*. Ergo *M* eſt numerus
per quem &c. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 3. Prop. 7.*

ADſcripta, & forma, ſunt quaſi æquales.

*Demonstr.*

Nam data qualibet inæqualitatis ratione, pos-
6. h. sunt inueniri, circumscripta formæ, & inscripta,
5. h. propiores æqualitati: est autem vtralibet adscripta,
& forma, minor, quàm circumscripta, & maior,
67. 5. quàm inscripta: ergo poteſt inueniri adscripta ad
formam propior æqualitati, quàm in data qualibet
def. 3. 3. inæqualitatis ratione. Quare adscripta, & forma,
sunt quasi æquales.

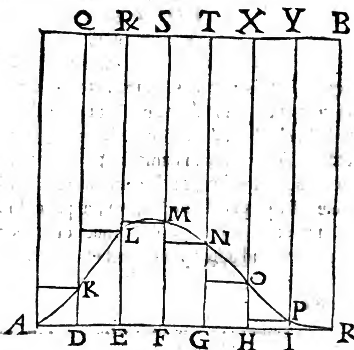
---

*Theor. 4. Prop. 8.*

ADscripta cuiusque formæ, ad formam in vertice formosæ tabulæ, est vt à radice numero partium basis, massa homonyma, ad totam vnitate plus ordinatā, quàm sit basis tabulæ speciosæ, ad quam pertinet massa.

*Hypoth.*

Sunto duæ formæ, vna in vertice formosæ
def. 12. h. *FO.u*, quæ est quadratum *AB*; altera *FO.1 0a2r3*, super eadem basi *AR*: in qua finis abscissarum *A*; finis residuarum *R*. Et esto *AR* diuisa in partes æquales, mediātibus pūctis *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*: per quæ ordinatæ sint, in altera forma, rectæ *DK*, *EL*, *FM*, *GN*, *HO*, *IP*; & in quadrato, sint *DQ*, *ER*, *FS*, *GT*, *HX*, *IY*. & sint *AK*, *DL*, *EM*, *FN*, *GO*, *HP* parallelogramma, ex quibus componitur adscripta, quæ vocetur *S*: & *AQ*, *DR*, *ES*, *FT*, *GX*, *HY*, *IB* parallelogramma æqualia, in quę diuiditur




uiditur quadratum *AB*. Assumatur etiam numerus *t*, partium æqualium ipsius *AR*: & à radice *t*, massa *O.1oa2r3*, quæ ad quintam basim pertinet speciosæ tabulæ: sumaturque ab eadem radice *t*, tota sexta *16*.

Dico *AB* ad *S*, esse vt *16* ad *O.1oa2r3*, à radice *t*.

*Demonstr.*

Quoniam *AR* ad *DK*, rationem habet compositam, ex duplicata *AR* ad *AD*, & ex triplicata *AR* ad *RD*, & ex subdecupla: videlicet pro abscissa vnitate *a*, compositam ex *12* ad *a2*, & ex *t3* ad *r3*, & ex subdecupla: idest,

 eandem,

eamdem, quàm $t5$ ad $10a2r3$, pro abſciſſa vnitate. ſed $AQ$ ad $AK$, eſt vt $AR$ ad $DK$: ergo $AQ$ ad $AK$, eſt vt $t5$ ad $10a2r3$, pro abſciſſa vnitate. Similiter $DR$ ad $DL$, eſt vt $t5$ ad $10a2r3$ pro abſciſſo binario: necnon ſimiliter pro reliquis abſciſſis numeris. Sunt autem tot parallelogramma componentia aſcriptam $S$, quot ordinatæ per puncta $D, E, F, G, H, I$; totidemque, quot ipſa puncta: & vnitate pauciores, quàm numerus partium ipſius $AR$; nempe totidem, quot ſunt eiuſdem numeri $t$ abſciſſiones, & abſciſſæ. Ergo per homologiam, æquemultiplicato vtrimque antecedente per $t$, collectiſque conſequentibus, quadratum $AB$, ad adſcriptam $S$, eſt vt $t$, ad $O.10a2r3$. Quod &c.

Quare &c.

---

*Theor. 5. Prop. 9.*

Forma omnes multiplæ, ad formam omnes ſimplas eaſdem proportionales, ſuper eadem baſi iacentem, eſt æquemultipla.

*Hypoth.*

Eſto $A$ forma omnes duplæ: & eſto $B$ forma omnes ſimplæ eædem proportionales, ſuper communi baſi iacentes.

Dico $A$ ad $B$ duplam eſſe.

*Demonſtr.*

Diuiſa enim communi baſi, per quemlibet numerum, in partes æquales, ordinatę per puncta diuiſio- *def.30 b*

uisionum in *A*, duplæ sunt ordinatarum per easdem puncta in *B*, singulæ singularum: & adiacentia parallelogramma, quæ adscriptas componunt, dupla sunt singula singulorum; & simul omnia
def.33b simul omnium: & adscripta *A*, adscriptæ *B* est du-
7. b. pla: sed adscripta *B* quasi est æqualis ad suam for-
31. 3. mam *B*: ergo adscripta *A*, quasi est dupla for-
7. b. mæ *B*: sed forma *A* quasi est æqualis adscriptæ *A*: & sunt formæ *A*, *B*, quantitates determinatæ.
33. 3. Ergo *A* ad *B* est dupla. Quod &c. Quare &c.

---

*Theor. 6. Prop. 10.*

OMnes quadraturæ super eadem basi constitutæ, sunt inter se æquales.

*Demonstr.*

8. b. Nam adscripta cuiuslibet quadraturæ, ad formam in vertice formosæ tabulæ iacentem, est vt quadratrix homonyma, ad totam vnitate plus ordinatam, quàm in qua basi est quadratrix in sua ta-
18. 3. bula: sed quadratrix ad huiusmodi totam, quasi est æqualis: ergo adscripta quadraturæ, ad formam in vertice formosæ iacentem, quasi est æqua-
7. b. lis: sed & ad suam quadraturam quasi est æqualis:
33. 3. ergo quadratura ad formam in vertice formosæ iacentem, est æqualis. Quare omnes quadraturæ, cum eidem determinatæ formæ sint æquales, inter se sunt æquales.

*Theor. 7. Prop. 11.*

IN vna quasque basi tabulæ subquadraturarum, subquadraturæ sunt æquales: & simul omnes, componunt quantitatem formæ, in vertice formosæ tabulæ iacentis.

*Demonstr.*

*def. 28 b* Nam in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, quadraturæ sunt æquemultiplæ. Sed æqua-
*9. b.* *10. b.* les, ipsæ sunt inter se quadraturæ: ergo æquales etiam sunt inter se subquadraturæ.

Deinde in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, quotupla est quadratura vna vnius, tot sunt subquadraturæ: atque totupla est summa omnium subquadraturarum, ad vnam tantùm: quare summa omnium subquadraturarum, vni quadra-
*10. b.* turæ est æqualis: sed vnaquælibet quadratura, æqualis est formæ in vertice formosæ tabulæ iacenti. Quare in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, summa omnium, æqualis est vni formæ, in vertice formosæ tabulæ iacenti.

---

*Porrò in Tabula Formosa, in ipsius formis, præter ea, quæ in epistola ad Excellentissimum Cassinum commemoraui ex meo libello Nouarum Quadraturarum alta inueni duo, quæ hic pro coronide recensebo: aliàs publicanda cum demonstratione, si Deus otium, & vlteriorem fortunam concesserit.*

*Vnum de mixtilineis angulis, & de cornibus formarum; & de angulorum quantitatibus, videlicet.*

Se-

Secundæ basis secunda & penultima forma, est binangula, cuius angulorum sinus rectus duplus versi. tertiæ verò, & quartę, ac reliquarum deinceps omnium basium formæ, prima & vltima, secunda & penultima, sunt vnicornes, & vnangulæ; quarum sinus rectus angulorum, ad versum totuplus est, quotus est ordo basis: in tertia, triplus; in quarta, quadruplus; in quinta quintuplus, & sic deinceps. reliquæ demum formæ omnes, sunt bicornes.

*Alterũ de centris grauitatum bipartitum, cuius prima pars est.*

Cuiusque formæ in tabula formosa, recta linea per centrum grauitatis ordinata, facit partes basis reciprocè proportionales, abscissam ad residuam, sicut eius ordinum numeri in sua basi à prima, & ab vltima. Exempli gratia. Formæ in quarta basi, secundæ tritultimæ per centrum ordinata, facit partes basis, abscissam ad residuam proportionales, vt 3 ad 2, ordo tritultimæ ad ordinem secundæ.

*Secunda pars est.* In vnaquaque forma, linea ex centro grauitatis ducta ordinatim ad basim, à basi, & centro finita, dicetur, Altitudo centralis. Itaque formarum in tabula formosa, centrales altitudines habent reciprocam rationem compositam ex rationibus numerorum, qui quadraturas ex formis producunt; ex directa iacentium in ijsdem basibus, & lateribus tabulæ quadraturarum, & ex conuersa iacentium in basibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs, quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2.* formæ in sexta basi tertiæ quintultimæ, ad centralem altitudinem *FO.a3r6*, formæ in nona

basi

basi septimæ quartultimæ, rationem habet compositam ex rationibus numerorum quadraturas producentium ex formis; ex ratione, inquam, 105, tertij quintultimi in sexta basi, ad 840, septimum quartultimum in nona basi; & ex ratione 35271 6, tredecimi septimultimi in decima octaua basi, ad 6435, quintum nonultimum in duodecima basi.

*Vel aliter*. Altitudines centrales formarum in tabula formosa iacentium, rationem habent compositam, tum ex ratione earumdem formarum conuersa, tum etiam ex directa aliarum in eadem tabula in basibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2*, ad centralem *FO.a3r6*, rationem habet compositam, ex rationibus, *FO.a3r6*, ad *FO.a4r2*; & *FO.a8r4*, ad *FO a6r12*.



# DEO GRATIAS.

# GEOMETRIA

# SPECIOSA.

# AD MAIOREM DEI GLORIAM

# GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

PRIMVM

*De poteſtatibus, à radice binomia, & reſidua.*

SECVNDVM

*De innumerabilibus numeroſis progreſsionibus.*

TERTIVM

*De quaſi proportionibus.*

QVARTVM

*De rationibus logarithmicis.*

QVINTVM

*De proprijs rationum logarithmis.*

SEXTVM

*De innumerabilibus quadraturis.*

PETRI MENGOLI

I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.

BONONIÆ, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij 1659.

*Superiorum permiſſu.*

Vidit Ouidius Montalbanus Philoſophus Moralis, Mathematicus, & Iuriſta: & vndequaq; ſpecioſa, & digniſſima luce publica inuenit hæc Elementa, &c. Pro Reuerendiſs. P. Inquiſit. Bonon.

Vidit D. Inuentius Tortus Cler. Reg. S. Pauli, Pœnit. pro Illuſtriſs. & Reuerendiſs. D. D. Hieronymo Boncompagno Archiep. Bonon. & Princ.

*Imprimatur.*

Fr. Gulielmus Fochus Inquiſitor Bonon.



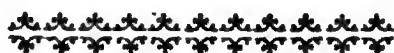
REGESTVM.

a b c d e f g h i k A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz. Aaa Bbb Ccc.

Omnes ſunt duerniones, præter k, quæ eſt ternio, & c, quæ eſt ſemiſol.

# Amplissimo, & Integerrimo Viro D. FERDINANDO RIARIO,

Marchioni Castilionis Orciæ, Patritio Veneto, Senatori Bononiensi, Antiquiori, & Benemerito Patri Patriæ: PETRVS MENGOLVS Fęlicitatem.





NEque Speciosæ Geometrię pulchritudini, neque tui Nominis claritati, quidquam appositum existimo, Vir Amplissime; quòd istud, in illius fronte praefulgeat. Ipsæ satis amabiles litterarum cultoribus visæ sunt, vtraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indiuisibilium noua Bonauenturæ Cauallerij Præceptoris mei, necnon & Viettæ Algebra: quarum, non ex confusione, aut mixtione, sed con-

iunctis

iunctis perfectionibus, noua quædam,& propria laboris nostri species, nemini poterit displicere. Tuæ verò splẽdor gloriæ, Mathematicas quantascunque longè prætergreditur lucubrationes: & quacunque versùm prudentia regit fortunam, præclarissimos diffundit radios; tuaque domestica sinceræ insinuat virtutis exempla. Inter quæ, singulare illud, ad bonas artes promouendas, tuæ officium est prouidentiæ; sua cuique studia consilio partiri, munificentia instruere, augere fauoribus, & auctoritate ad Magisterij decus, & perfectionem perducere. Id quod ego expertus hucusque sum ab adolescẽtia, tuæ

alumnus protectionis. Nam te ſuaſore primùm, deinde (poſt Caualle-rium defunctum) etiam præceptore, ſcholaſticus Mathematicus; te Vexilliſero, profeſſor publicus Arithmetices, ante lauream; & poſt lauream, te noſtri Archigymnaſij moderatore, ad nouam vſque cathedrã Mechanicarum euectus: litterariam dignitatem, & fortunas omnes, tuis debeo beneficijs. Hanc itaque meam Geometriam, grati erga te animi perpetuum ſtatuo monimentum: tuorumque in me munerum aliqualem cenſum, in illius oblatione repẽdo. Fęliciori longè ſucceſſu, quàm cum alijs plerũque ſcriptoribus con-

tingit, ſurdis vota numinibus nuncupare: tabellaſque appendere; quarum dij ſui ne quidem titulos intelligant. Tibi vni, me ipſum totum, voluntate pariter, & intellectu deditum, creditumque deuincio: qui ſi forte ſtudijs Geometriæ quidquam adiecero, propoſito conueniens titulo, nouum videlicet, atque ſpecioſum; tuam poſtulo, & expecto, noſtrorum elementorum, benigna in ſuſceptione, ſententiam. Vale. Bononiæ IX. Kal. Ianuarias MDCLX.



# Lectori Elementario.



Tibi hunc librum scripsi, Lector, & Scholaris beneuole: ideoque nihil alienum sumpsi, præterquam ex prioribus nouem Elementis Euclidis. Vt huius libri beneficio vtaris, tradam breuiter, sex faciliora quædam mathemata, singula pro singulis elementis, per quæ possis, lectos quosque titulos propositionum, numerosis exemplis confirmare, nostrasque demonstrationes, arithmeticæ artis certitudine, præuenire.

*Caput Primum.*

Primum est, pro primo elemento: constructio potestatum cuiuslibet numeri binomij, vel residui. Est autem cuiusque numeri prima potestas, ipse numerus: secunda verò, est eiusdem numeri per se ipsum multiplicationis productus, quæ dicitur, quadratus: tertia, est productus primæ potestatis in secundam, quæ dicitur, cubus: quarta, est productus primæ potestatis in tertiam, quæ dicitur, quadroquadratus: quinta, est productus primæ potestatis in quartam: & sic deinceps in infinitum.

Potestates numerorum, vsque ad decimam, & vsque ad potestates denarij, sequens exhibet tabella.

*Numerorum* *Poteſtates.*

| Prima | Secunda | Tertia | Quarta | Quinta |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 |

*Numerorum* *Poteſtates.*

| | Sexta | Septima | Octaua |
|---|---|---|---|
| 2 | 64 | 128 | 256 |
| 3 | 729 | 2187 | 6561 |
| 4 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 5 | 15625 | 78125 | 390625 |
| 7 | 46656 | 279936 | 1679616 |
| 7 | 117649 | 823543 | 5764801 |
| 8 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| 9 | 531441 | 4782969 | 43046721 |
| 10 | 1000000 | 10000000 | 100000000 |

No-

*Numerorum* *Potestates.*

| | *Nona* | *Decima* |
|---|---|---|
| 2 | 512 | 1024 |
| 3 | 19683 | 59049 |
| 4 | 262144 | 1048576 |
| 5 | 1953125 | 9765625 |
| 6 | 10077696 | 60466176 |
| 7 | 40353607 | 282475249 |
| 8 | 134217728 | 1073741824 |
| 9 | 387420489 | 3486784401 |
| 10 | 1000000000 | 10000000000 |

Porrò cum Francisco Viettæ, alijsque placuerit Analystis, indeterminatum quemque determinabilem numerum, eiusque priorem potestatem, cuiuspiam simplicis litteræ charactere significare: placuit consequenter, indeterminatas determinabiles eiusdem numeri potestates alias, eiusdem litteræ charactere significare, numeris dextrorsum adscriptis, indicantibus, quota quæque sit potestas. vt exempli gratia, cum indeterminati numeri determinabilis prima potestas fuerit notata charactere litteræ *t*; secunda potestas, charactere significabitur *t*2; tertia potestas, charactere *t*3; quarta, *t*4; quinta, *t*5: & sic deinceps. cum verò determinatus fuerit litteræ *t*, valor ternarius, 3: tunc determinatus erit characteris *t*2, valor 9; characteris *t*3, valor 27; characteris *t*4, valor 81; characteris *t*5, valor 243: & sic deinceps.

Placuit etiam duorum indeterminatorum determinabilium numerorum poteſtatibus inuicem multiplicatis, productos, pariter indeterminatos & determinabiles numeros, ijſdem characteribus producentiũ ſignificare deinceps conſcriptis, vt ex multiplicatione *a* per *r*, productum *ar*; & ex multiplicatione *a2* per *r*, productum *a2r*, & ex multiplſcatione *a* per *r2*, productum *ar2*.

Quibus characteribus à Vietta, Herigonio, Beugrand penes Cauallerium, vſitatis, conuenientia nos adinuenimus nomina. Nam productum *ar*, ex multiplicatione primarum poteſtatum *a*, & *r*, vocamus, Vniprimam: & productum *a2r*, ex multiplicatione ſecundæ poteſtatis *a*, per primam *r*, vocamus, Biprimam: productum verò *ar2*, ex multiplicatione primæ *a*, per ſecundam *r*, vocamus, Vniſecundam: & *a3r*, productum tertiæ *a*, per primam *r*, vocamus, Triprimam: & *a2r2*, ſecundæ *a*, per ſecundam *r*, Biſecundam: & *ar3*, primæ *a*, per tertiam *r*, Vnitertiam: item *a4r*, Quadriprimam: *a3r2*, Triſecundam: *a2r3*, Bitertiam: *ar4*, Vniquartam. & ſic reliquas

| | |
|---|---|
| *a5r*, Quintiprimam. | *a3r4*, Triquartam. |
| *a4r2*, Quadriſecundam. | *a2r5*, Biquintam. |
| *a3r3*, Tritertiam. | *ar6*, Vniſextam. |
| *a2r4*, Biquartam. | *a7r*, Septimiprimam. |
| *ar5*, Vniquintam. | *a6r2*, Sextiſecundam. |
| *a6r*, Sextiprimam. | *a5r3*, Quintitertiam. |
| *a5r2*, Quintiſecundam. | *a4r4*, Quadriquartam. |
| *a4r3*, Quadritertiam. | *a3r5*, Triquintam. |

*a2r6*,

| | |
|---|---|
| $a2r6$, Bisextam. | $a9r$, Noniprimam. |
| $ar7$, Vniseptimam. | $a8r2$, Octauisecundam. |
| $a8r$, Octauiprimam. | $a7r3$, Septimitertiam. |
| $a7r2$, Septimisecundam. | $a6r4$, Sextiquartam. |
| $a6r3$, Sextitertiam. | $a5r5$, Quintiquintam. |
| $a5r4$, Quintiquartam. | $a4r6$, Quadrisextam. |
| $a4r5$, Quadriquintam. | $a3r7$, Triseptimam. |
| $a3r6$, Trisextam. | $a2r8$, Biotauam. |
| $a2r7$, Biseptimam. | $ar9$, Vninonam. |
| $ar8$, Vniotauam. | |

Quare si litteræ $a$, taxatus fuerit valor 3, & litterę $r$, valor 2; erit characteris $ar$ vniprimæ, valor 6, productus multiplicationis 3 per 2: erit deinde characteris $a2$, valor 9; & characteris $a2r$ biprimæ, valor 18: item characteris $r2$, valor erit 4; & characteris $ar2$ vnisecundæ, valor 12: & sic deinceps.

Itaque sicut Euclides in 2. 8. numerosam triangularem tabulam instituit proportionalium ab vnitate, datisque minimis à numeris, datam inter se rationem habentibus: ita eadem methodo, placuit litteratam triangularem tabulam disponere proportionalium characterum, à data vnitate, propositisque duobus indeterminatis determinabilibus numeris, indeterminatam inter se rationem habentibus. Pro charactere autem vnitatis, litteram $u$ collocauimus, in vertice triangularis tabulæ, & pro indeterminatis determinabilibus numeris, duas litteras $a$, & $r$.

Ta-

Tabula autem proportionalium, eſt quæ ſequitur, à vertice vſque ad decimam extenſa baſim, in qua vndecim cenſentur proportionales, in eadem ratione *a* ad *r*.

*Tabula Proportionalium.*

*u*

*a r*

*a2 ar r2*

*a3 a2r ar2 r3*

*a4 a3r a2r2 ar3 r4*

*a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5*

*a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6*

*a7 a6r a5r2 a4r3 a3r4 a2r5 ar6 r7*

*a8 a7r a6r2 a5r3 a4r4 a3r5 a2r6 ar7 r8*

*a9 a8r a7r2 a6r3 a5r4 a4r5 a3r6 a2r7 ar8 r9*

*a10 a9r a8r2 a7r3 a6r4 a5r5 a4r6 a3r7 a2r8 ar9 r10.*

In

In qua tabula, quoniam litteræ *u*, valor est vnitas: si litteræ *a*, valor fuerit 3; litteræ verò *r*, valor 2: reliquorum characterum valores ordinantur similiter in simili tabula, quàm præcipit Euclides in præcitata prop. 2. 8. Elem.

*Tabula Proportionalium Eucl. Elem.* 2. 8.

1.
2. 3.
4. 6. 9.
8. 12. 18. 24.
16. 24. 36. 54. 81.
32. 48. 72. 108. 162. 243.
64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.
128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187.
256. 384. 576. 864. 1296. 1944. 2916. 4374. 6561.
512. 768. 1152. 1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.
1024. 1536. 2304. 3456. 5184. 7776. 11664. 17496. 26244. 39366. 59049.

Pla-

Placuit demum ijſdem Analyſtis, ex numero indeterminato, & determinabili (ſiue poteſtate, ſiue ex poteſtatibus producto) & ex determinato numero, per multiplicationem factum productum indeterminatum pariter atque determinabilem, eodem producentis charactere ſignificari, præſcripto numero multiplicationis. vt *3a2r*, triplum productum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub prima numeri *r*; vel triplam biprimam: & *10a2r3*, decuplum productum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub tertia numeri *r*; vel decuplam bitertiam. & ſic de reliquis.

Præter tabulam proportionalium prædictam, oportet aliam tabulam triangularem habere in promptu, quam Analyſtæ vocant, multiplicium tabulam: in qua vnitates in vertice ordinantur, & in lateribus; in area verò numeri, quorum vniſquiſque inferioris baſis numerus, duorũ, ſibi, quaſi cornua fronti, adiacentium ſuperioris baſis numerorum eſt aggregatum: vt ex ipſius tabulæ patebit lectura; quam exponimus extenſam, à vertice vſque ad decimam baſim.



Ta-

*Tabula Multiplicium.*

1.
1. 1.
1. 2. 1.
1. 3. 3. 1.



nitur ex quar
tertia abſciſſi
ſexcuplo ſub
ſeſcupla biſe
ſi, atque tert
ta poteſtate
characteres
ipſa poſſent

*Prima* $a+r$
*Secunda* $a2$
*Tertia* $a3-$
*Quarta* $a4$
*Quinta* $a5$
*Sexta* $a6$
$+r6.$
*Septima* $a$
$+21a2$
*Octaua* $a8$
$+28a2$
*Nona* $a9$
$a4r5+$
*Decima* $a$
$+252a$
$+r10.$
Quæ theo
nem, d

Esto litteræ *a*, valor 2.
litteræ *r*, valor 3.
ideoque characteris *a*+*r*, valor 5.

| | | |
|---|---|---|
| | $a2$: | 4 |
| | $2ar$: | 12 |
| | $r2$: | 9 |
| Secunda poteſtas à | 5 : | 25 |
| | $a3$: | 8 |
| | $3a2r$: | 36 |
| | $3ar2$: | 54 |
| | $r3$: | 27 |
| Tertia poteſtas à | 5: | 125 |
| | $a4$: | 16 |
| | $4a3r$: | 96 |
| | $6a2r2$: | 216 |
| | $4ar3$: | 216 |
| | $r4$: | 81 |
| Quarta poteſtas à | 5 : | 625 |

Reſiduus dicitur numerus, qui duorum inæqualium numerorum, relinquitur, à maiore, minore ſubtracto; à quibus denominatur. vt numerus binarius, tunc reſiduus dice-

d tur

tur, cum à quinario, ternario dempto, relictus fuerit; & à quinario atque ternario denominatus.. Characterem autem residui numeri, placuit, ex characteribus totius & abscissi denotari, à quibus denominatur, lineola, interueniente, quæ signum est subtractionis posterioris characteris à priore. vt $5 - 3$, valet perinde atque 2. Similiter si duo numeri, à quibus residuus denominatur, fuerint indeterminati, $t$ maior, $a$ minor, residuus charactere significabitur ex vtrisque $t - a$.

Itaque sicut $t - a$, prima suijpsius potestas, fit ex nominibus $t, a$, in prima basi tabulæ nominum iacentibus; ita secunda potestas eiusdem residui $t - a$, fit ex nominibus in secunda basi, alternatim additis, & subtractis, $t2 - 2ta + a2$; tertia, ex nominibus, in tertia basi $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; quarta, ex nominibus, in quarta basi $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$: & reliquæ deinceps potestates, fiunt similiter ex nominibus, in reliquis deinceps basibus iacentibus.

Huc pariter innumerabilia pertinent huiusmodi theoremata. Si à toto quodam maiore numero, quisque minor numerus abscissus fuerit: residui secunda potestas relinquitur, ex secunda potestate totius; dempto duplo producto sub toto & abscisso, idest, dempta dupla vniprima; addita secunda potestate abscissi: tertia potestas residui, relinquitur, ex tertia potestate totius; dempto triplo producto sub secunda potestate totius & sub prima abscissi, idest dempta tripla biprima; addito triplo producto sub prima totius

totius & ſub ſecunda abſciſſi, ideſt addita tripla vniſecunda; dempta tertia poteſtate abſciſſi: quarta reſidui, relinquitur, ex quarta totius; dempto quadruplo producto ſub tertia totius, & ſub prima abſciſſi, ideſt, dempta quadrupla triprima; addito ſexcuplo producto ſub ſecundis poteſtatibus totius & abſciſſi, ideſt, addita ſexcupla biſecunda; dempto quadruplo producto ſub prima totius, & ſub tertia abſciſſi, ideſt dempta quadrupla vnitertia; addita quarta abſciſſi. aliaque ſimilia, quorum præſtat characteres oculis intueri, quàm voces legere.

*Poteſtates reſidui* $t - a$.

*Prima* $t - a$.

*Secunda* $t2 - 2ta + a2$.

*Tertia* $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

*Quarta* $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$.

*Quinta* $t5 - 5t4a + 10t3a2 - 10t2a3 + 5ta4 - a5$.

*Sexta* $t6 - 6t5a + 15t4a2 - 20t3a3 + 15t2a4 - 6ta5 + a6$.

*Septima* $t7 - 7t6a + 21t5a2 - 35t4a3 + 35t3a4 - 21t2a5 + 7ta6 - a7$.

*Octaua* $t8 - 8t7a + 28t6a2 - 56t5a3 + 70t4a4 - 56t3a5 + 28t2a6 - 8ta7 + a8$.

*Nona* $t9 - 9t8a + 36t7a2 - 84t6a3 + 126t5a4 - 126t4a5 + 84t3a6 - 36t2a7 + 9ta8 - a9$.

*Decima* $t10 - 10t9a + 45t8a2 - 120t7a3 + 210t6a4 - 252t5a5 + 210t4a6 - 120t3a7 + 45t2a8 - 10ta9 + a10$.

Quæ ſimiliter demonſtrabuntur facile per inductionem, determinato cuiuſque litteræ valore.

Eſto litteræ *t*, valor 5.
litteræ *a* valor 3.
ideoque characteris *t--a*, valor 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *t2*: | 25 | *2ta*: | 30 |
| *a2*: | 9 | | |
| | 34 | | |
| | 30 | | |

Secunda poteſtas à 2: 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| *t3*: | 125 | *3t2a*: | 225 |
| *3ta2*: | 135 | *a3*: | 27 |
| | 260 | | 252 |
| | 252 | | |

Tertia poteſtas à 2: 8

| | | | |
|---|---|---|---|
| *t4*: | 625 | *4t3a*: | 1500 |
| *6t2a2*: | 1350 | *4ta3*. | 540 |
| *a4*: | 81 | | |
| | 2056 | | 2040 |
| | 2040 | | |

Quarta poteſtas à 2: 16

Si-

Similibus exemplis poteſt confirmari, tota conſtructionis poteſtatum ars, à binomijs, & reſiduis: quàm pro quantitatibus omnifariam, in primo noſtro elemento pleniùs oſtendimus.

*Caput* 2.

Secundum, pro ſecundo eſt elemento: multifariam progreſſiuorum regulares collectiones; in quibus præcipua noſtri inuenti pars eſt. Accipiatur quilibet numerus, cuius abſcindantur ordinatim vnitas, binarius, ternarius, & deinceps quicunque numeri poſſunt abſcindi, vt vel numerus, vel ſaltem vnitas relinquatur: & reſidui vſque ad vnitatem, totidem ſaluentur, quot abſciſſi, ſinguli reſidui è regione ſuorum abſciſſorum.

Placuit autem acceptum numerum vocare quantitatem totam, & ſignificare littera $t$: eiuſque poteſtates vocare totas; $t2$, totam ſecundam; $t3$, totam tertiam; $t4$ totam quartam; & ſic deinceps. placuit etiam acceptos abſciſſos vocare quantitates abſciſſas, & ſignificare littera $a$: item abſciſſorum poteſtates, vocare abſciſſas; $a2$, abſciſſam ſecundam; $a3$, abſciſſam tertiam; $a4$, abſciſſam quartam; & deinceps: reſiduos quoque placuit vocare, quantitates reſiduas, & ſignificare littera $r$: item reſiduorum poteſtates, vocare reſiduas; $r2$, reſiduam ſecundam; $r3$, reſiduam tertiam; $r4$, reſiduam quartam; & deinceps. denique ſub poteſtatibus cuiuſque abſciſſæ, & ſuæ reſiduæ, placuit productos denominare vt ſupra, $ar$ vniprimas, $a2r$ biprimas, $ar2$ vniſecundas, $a3r$ triprimas, $a2r2$ biſecun-

ſecundas, *ar3* vnitertias, & ſic deinceps.

Sed ecce tabula, in qua cuiuſque numeri ab vnitate vſque primùm ad 7. deinde vſque ad 10. pro vnaqualibet abſciſſa, ſcripta eſt è regione reſidua, & abſciſſa ſecunda, & vniprima, & reſidua ſecunda, & abſciſſa tertia, & biprima, & vniſecunda, & reſidua tertia, & ſic deinceps vſque ad proportionales in decima baſi tabulæ proportionalium iacentes.



| t | a | r | a2 | ar | r2 | a3 | a2r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 8 | 4 |
| 4 | 1 | 3 | 1 | 3 | 9 | 1 | 3 |
| | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 |
| | 3 | 1 | 9 | 3 | 1 | 27 | 9 |
| 5 | 1 | 4 | 1 | 4 | 16 | 1 | 4 |
| | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 8 | 12 |
| | 3 | 2 | 9 | 6 | 4 | 27 | 18 |
| | 4 | 1 | 16 | 4 | 1 | 64 | 16 |
| 6 | 1 | 5 | 1 | 5 | 25 | 1 | 5 |
| | 2 | 4 | 4 | 8 | 16 | 8 | 16 |
| | 3 | 3 | 9 | 9 | 9 | 27 | 27 |
| | 4 | 2 | 16 | 8 | 4 | 64 | 32 |
| | 5 | 1 | 25 | 5 | 1 | 125 | 25 |
| 7 | 1 | 6 | 1 | 6 | 36 | 1 | 6 |
| | 2 | 5 | 4 | 10 | 25 | 8 | 20 |
| | 3 | 4 | 9 | 12 | 16 | 27 | 36 |
| | 4 | 3 | 16 | 12 | 9 | 64 | 48 |
| | 5 | 2 | 25 | 10 | 4 | 125 | 50 |
| | 6 | 1 | 36 | 6 | 1 | 216 | 36 |

| t | ar2 | r3 | a4 | a3r | a2r2 | ar3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| | 2 | 1 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 4 | 9 | 27 | 1 | 3 | 9 | 27 |
| | 8 | 8 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| | 3 | 1 | 81 | 27 | 9 | 3 |
| 5 | 16 | 64 | 1 | 4 | 16 | 64 |
| | 18 | 27 | 16 | 24 | 36 | 54 |
| | 12 | 8 | 81 | 54 | 36 | 24 |
| | 4 | 1 | 256 | 64 | 16 | 4 |
| 6 | 25 | 125 | 1 | 5 | 25 | 125 |
| | 32 | 64 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| | 27 | 27 | 81 | 81 | 81 | 81 |
| | 16 | 8 | 256 | 128 | 64 | 32 |
| | 5 | 1 | 625 | 125 | 25 | 5 |
| 7 | 36 | 216 | 1 | 6 | 36 | 216 |
| | 50 | 125 | 16 | 40 | 100 | 250 |
| | 48 | 64 | 81 | 108 | 144 | 192 |
| | 36 | 27 | 256 | 192 | 144 | 108 |
| | 20 | 8 | 625 | 250 | 100 | 40 |
| | 6 | 1 | 1296 | 216 | 36 | 6 |

| t | r4 | a5 | a4r | a3r2 | a2r3 | ar4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 16 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| | 1 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 4 | 81 | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |
| | 16 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| | 1 | 243 | 81 | 27 | 9 | 3 |
| 5 | 256 | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 |
| | 81 | 32 | 48 | 72 | 108 | 162 |
| | 16 | 243 | 162 | 108 | 72 | 48 |
| | 1 | 1024 | 256 | 64 | 16 | 4 |
| 6 | 625 | 1 | 5 | 25 | 125 | 625 |
| | 256 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| | 81 | 243 | 243 | 243 | 243 | 243 |
| | 16 | 1024 | 512 | 256 | 128 | 64 |
| | 1 | 3125 | 625 | 125 | 25 | 5 |
| 7 | 1296 | 1 | 6 | 36 | 216 | 1296 |
| | 625 | 32 | 80 | 200 | 500 | 1250 |
| | 256 | 243 | 324 | 432 | 576 | 768 |
| | 81 | 1024 | 768 | 576 | 432 | 324 |
| | 16 | 3125 | 1250 | 500 | 200 | 80 |
| | 1 | 7776 | 1296 | 216 | 36 | 6 |

| t | r5 | a6 | a5r | a4r2 | a3r3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 32 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 64 | 32 | 16 | 8 |
| 4 | 243 | 1 | 3 | 9 | 27 |
| | 32 | 64 | 64 | 64 | 64 |
| | 1 | 729 | 243 | 81 | 27 |
| 5 | 1024 | 1 | 4 | 16 | 64 |
| | 243 | 64 | 96 | 144 | 216 |
| | 32 | 729 | 486 | 324 | 216 |
| | 1 | 4096 | 1024 | 256 | 64 |
| 6 | 3125 | 1 | 5 | 25 | 125 |
| | 1024 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| | 243 | 729 | 729 | 729 | 729 |
| | 32 | 4096 | 2048 | 1024 | 512 |
| | 1 | 15625 | 3125 | 625 | 125 |
| 7 | 7776 | 1 | 6 | 36 | 216 |
| | 3125 | 64 | 160 | 400 | 1000 |
| | 1024 | 729 | 972 | 1296 | 1728 |
| | 243 | 4096 | 3072 | 2304 | 1728 |
| | 32 | 15625 | 6250 | 2500 | 1000 |
| | 1 | 46656 | 7776 | 1296 | 216 |

| t | a2r4 | ar5 | r6 | a7 | a6r |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 16 | 32 | 64 | 1 | 2 |
| | 4 | 2 | 1 | 128 | 64 |
| 4 | 81 | 243 | 729 | 1 | 3 |
| | 64 | 64 | 64 | 128 | 128 |
| | 9 | 3 | 1 | 2187 | 729 |
| 5 | 256 | 1024 | 4096 | 1 | 4 |
| | 324 | 486 | 729 | 128 | 192 |
| | 144 | 96 | 64 | 2187 | 1458 |
| | 16 | 4 | 1 | 16384 | 4096 |
| 6 | 625 | 3125 | 15625 | 1 | 5 |
| | 1024 | 2048 | 4096 | 128 | 256 |
| | 729 | 729 | 729 | 2187 | 2187 |
| | 256 | 128 | 64 | 16384 | 8192 |
| | 25 | 5 | 1 | 78125 | 15625 |
| 7 | 1296 | 7776 | 46656 | 1 | 6 |
| | 2500 | 6250 | 15625 | 128 | 320 |
| | 2304 | 3072 | 4096 | 2187 | 2916 |
| | 1296 | 972 | 729 | 16384 | 12288 |
| | 400 | 160 | 64 | 78125 | 31250 |
| | 36 | 6 | 1 | 279936 | 46656 |

| *t* | *a5r2* | *a4r3* | *a3r4* | *a2r5* | *ar6* |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 4 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 |
| | 128 | 128 | 128 | 128 | 128 |
| | 243 | 81 | 27 | 9 | 3 |
| 5 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 |
| | 288 | 432 | 648 | 972 | 1458 |
| | 972 | 648 | 432 | 288 | 192 |
| | 1024 | 256 | 64 | 16 | 4 |
| 6 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 |
| | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 |
| | 2187 | 2187 | 2187 | 2187 | 2187 |
| | 4096 | 2048 | 1024 | 512 | 256 |
| | 3125 | 625 | 125 | 25 | 5 |
| 7 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 |
| | 800 | 2000 | 5000 | 12500 | 31250 |
| | 3888 | 5184 | 6912 | 9216 | 12288 |
| | 9216 | 6912 | 5184 | 3888 | 2916 |
| | 12500 | 5000 | 2000 | 800 | 320 |
| | 7776 | 1296 | 216 | 36 | 6 |

| t | r7 | a8 | a7r | a6r2 | a5r3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 128 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 256 | 128 | 64 | 32 |
| 4 | 2187 | 1 | 3 | 9 | 27 |
| | 128 | 256 | 256 | 526 | 256 |
| | 1 | 6561 | 2187 | 729 | 243 |
| 5 | 16384 | 1 | 4 | 16 | 64 |
| | 2187 | 256 | 384 | 576 | 864 |
| | 128 | 6561 | 4374 | 2916 | 1944 |
| | 1 | 65536 | 16384 | 4096 | 1024 |
| 6 | 78125 | 1 | 5 | 25 | 125 |
| | 16384 | 256 | 512 | 1024 | 2048 |
| | 2187 | 6561 | 6561 | 6561 | 6561 |
| | 128 | 65536 | 32768 | 16384 | 8192 |
| | 1 | 390625 | 78125 | 15625 | 3125 |
| 7 | 279936 | 1 | 6 | 36 | 216 |
| | 78125 | 256 | 640 | 1600 | 4000 |
| | 16384 | 6561 | 8748 | 11664 | 15552 |
| | 2187 | 65536 | 49152 | 36864 | 27648 |
| | 128 | 390625 | 156250 | 62500 | 25000 |
| | 1 | 1679616 | 279936 | 46656 | 7776 |

| t | $a^4r^4$ | $a^3r^5$ | $a^2r^6$ | $ar^7$ | $r^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| | 256 | 256 | 256 | 256 | 256 |
| | 81 | 27 | 9 | 3 | 1 |
| 5 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| | 1296 | 1944 | 2916 | 4374 | 6561 |
| | 1296 | 864 | 576 | 384 | 256 |
| | 256 | 64 | 16 | 4 | 1 |
| 6 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 |
| | 4096 | 8192 | 16384 | 32768 | 65536 |
| | 6561 | 6561 | 6561 | 6561 | 6561 |
| | 4096 | 2048 | 1024 | 512 | 256 |
| | 625 | 125 | 25 | 5 | 1 |
| 7 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 |
| | 10000 | 25000 | 62500 | 156250 | 390625 |
| | 20736 | 27648 | 36864 | 49152 | 65536 |
| | 20736 | 15552 | 11664 | 8748 | 6561 |
| | 10000 | 4000 | 1600 | 640 | 256 |
| | 1296 | 216 | 36 | 6 | 1 |

| t | a9 | a8r | a7r2 | a6r3 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| | 512 | 256 | 128 | 64 |
| 4 | 1 | 3 | 9 | 27 |
| | 512 | 512 | 512 | 512 |
| | 19683 | 6561 | 2187 | 729 |
| 5 | 1 | 4 | 16 | 64 |
| | 512 | 768 | 1152 | 1728 |
| | 19683 | 13122 | 8748 | 5832 |
| | 262144 | 65536 | 16384 | 4096 |
| 6 | 1 | 5 | 25 | 125 |
| | 512 | 1024 | 2048 | 4096 |
| | 19683 | 19683 | 19683 | 19683 |
| | 262144 | 131072 | 65536 | 32768 |
| | 1953125 | 390625 | 78125 | 15625 |
| 7 | 1 | 6 | 36 | 216 |
| | 512 | 1280 | 3200 | 8000 |
| | 19683 | 26244 | 34992 | 46656 |
| | 262144 | 196608 | 147456 | 110592 |
| | 1953125 | 781250 | 312500 | 125000 |
| | 10077696 | 1679616 | 279936 | 46656 |

| $t$ | $a^5r^4$ | $a^4r^5$ | $a^3r^6$ | $a^2r^7$ | $ar^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 |
| 4 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| | 512 | 512 | 512 | 512 | 512 |
| | 243 | 81 | 27 | 9 | 3 |
| 5 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| | 2592 | 3888 | 5832 | 8748 | 13122 |
| | 3888 | 2592 | 1728 | 1152 | 768 |
| | 1024 | 256 | 64 | 16 | 4 |
| 6 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 |
| | 8192 | 16384 | 32768 | 65536 | 131072 |
| | 19683 | 19683 | 19683 | 19683 | 19683 |
| | 16384 | 8192 | 4096 | 2048 | 1024 |
| | 3125 | 625 | 125 | 25 | 5 |
| 7 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 |
| | 20000 | 50000 | 125000 | 312500 | 781250 |
| | 62208 | 82944 | 110592 | 147456 | 196608 |
| | 82944 | 62208 | 46656 | 34992 | 26244 |
| | 50000 | 20000 | 8000 | 3200 | 1280 |
| | 7776 | 1296 | 216 | 36 | 6 |

| 1 | r9 | a10 | a9r | a8r2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 512<br>1 | 1<br>1024 | 2<br>512 | 4<br>256 |
| 4 | 19683<br>512<br>1 | 1<br>1024<br>59049 | 3<br>1024<br>19683 | 9<br>1024<br>6561 |
| 5 | 262144<br>19683<br>512<br>1 | 1<br>1024<br>59049<br>1048576 | 4<br>1536<br>39366<br>262144 | 16<br>2304<br>26244<br>65536 |
| 6 | 1953125<br>262144<br>19683<br>512<br>1 | 1<br>1024<br>59049<br>1048576<br>9765625 | 5<br>2048<br>59049<br>524288<br>1953125 | 25<br>4096<br>59049<br>262144<br>390625 |
| 7 | 10077696<br>1953125<br>262144<br>19683<br>512<br>1 | 1<br>1024<br>59049<br>1048576<br>9765625<br>60466176 | 6<br>2560<br>78732<br>786432<br>3906250<br>10076696 | 36<br>6400<br>104976<br>589824<br>1562500<br>1679616 |

| t | a7r3 | a6r4 | a5r5 | a46r |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| | 128 | 64 | 32 | 16 |
| 4 | 27 | 81 | 243 | 729 |
| | 1024 | 1024 | 1024 | 1024 |
| | 2187 | 729 | 243 | 81 |
| 5 | 64 | 256 | 1024 | 4096 |
| | 3456 | 5184 | 7776 | 11664 |
| | 17496 | 11664 | 7776 | 5184 |
| | 16384 | 4096 | 1024 | 256 |
| 6 | 125 | 625 | 3125 | 15265 |
| | 8192 | 16384 | 32768 | 65536 |
| | 59049 | 59049 | 59049 | 59049 |
| | 131072 | 65536 | 32768 | 16384 |
| | 78125 | 15625 | 3125 | 625 |
| 7 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 |
| | 16000 | 40000 | 100000 | 250000 |
| | 139968 | 186624 | 248832 | 331776 |
| | 442368 | 331776 | 248832 | 186624 |
| | 625000 | 250000 | 100000 | 40000 |
| | 279936 | 46656 | 7776 | 1296 |

| t | $a^3r^7$ | $a^2r^8$ | $ar^9$ | $r^{10}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 |
| | 1024 | 1024 | 1024 | 1024 |
| | 27 | 9 | 3 | 1 |
| 5 | 16384 | 65536 | 262144 | 1048576 |
| | 17496 | 26244 | 39366 | 59049 |
| | 3456 | 2304 | 1536 | 1024 |
| | 64 | 16 | 4 | 1 |
| 6 | 78125 | 390625 | 1953125 | 9765625 |
| | 131072 | 262144 | 524288 | 1048576 |
| | 59049 | 59049 | 59049 | 59049 |
| | 8192 | 4096 | 2048 | 1024 |
| | 125 | 25 | 5 | 1 |
| 7 | 279936 | 1679616 | 10077696 | 60466176 |
| | 625000 | 1562500 | 3906250 | 9765625 |
| | 442368 | 589824 | 786432 | 1048576 |
| | 139968 | 104976 | 78732 | 59049 |
| | 16000 | 6400 | 2560 | 1024 |
| | 216 | 36 | 6 | 1 |

Sequitur Tabula pro numeris 8, 9, & 10.

| t | a | r | a2 | ar | r2 | a3 | a2r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 7 | 1 | 7 | 49 | 1 | 7 |
| | 2 | 6 | 4 | 12 | 36 | 8 | 24 |
| | 3 | 5 | 9 | 15 | 25 | 27 | 45 |
| | 4 | 4 | 16 | 16 | 16 | 64 | 64 |
| | 5 | 3 | 25 | 15 | 9 | 125 | 75 |
| | 6 | 2 | 36 | 12 | 4 | 216 | 72 |
| | 7 | 1 | 49 | 7 | 1 | 343 | 49 |
| 9 | 1 | 8 | 1 | 8 | 64 | 1 | 8 |
| | 2 | 7 | 4 | 14 | 49 | 8 | 28 |
| | 3 | 6 | 9 | 18 | 36 | 27 | 54 |
| | 4 | 5 | 16 | 20 | 25 | 64 | 80 |
| | 5 | 4 | 25 | 20 | 16 | 125 | 100 |
| | 6 | 3 | 36 | 18 | 9 | 216 | 108 |
| | 7 | 2 | 49 | 14 | 4 | 343 | 98 |
| | 8 | 1 | 64 | 8 | 1 | 512 | 64 |
| 10 | 1 | 9 | 1 | 9 | 81 | 1 | 9 |
| | 2 | 8 | 4 | 16 | 64 | 8 | 32 |
| | 3 | 7 | 9 | 21 | 49 | 27 | 63 |
| | 4 | 6 | 16 | 24 | 36 | 64 | 96 |
| | 5 | 5 | 25 | 25 | 25 | 125 | 125 |
| | 6 | 4 | 36 | 24 | 16 | 216 | 144 |
| | 7 | 3 | 49 | 21 | 9 | 343 | 147 |
| | 8 | 2 | 64 | 16 | 4 | 512 | 128 |
| | 9 | 1 | 81 | 9 | 1 | 729 | 81 |

| $t$ | $ar^2$ | $r^3$ | $a^4$ | $a^3r$ | $a^2r^2$ | $ar^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 49 | 343 | 1 | 7 | 49 | 343 |
| | 72 | 216 | 16 | 48 | 144 | 432 |
| | 75 | 125 | 81 | 135 | 225 | 375 |
| | 64 | 64 | 256 | 256 | 256 | 256 |
| | 45 | 27 | 625 | 375 | 225 | 135 |
| | 24 | 8 | 1296 | 432 | 144 | 48 |
| | 7 | 1 | 2401 | 343 | 49 | 7 |
| 9 | 64 | 512 | 1 | 8 | 64 | 512 |
| | 98 | 343 | 16 | 56 | 196 | 686 |
| | 108 | 216 | 81 | 162 | 324 | 6·8 |
| | 100 | 125 | 256 | 320 | 400 | 500 |
| | 80 | 64 | 625 | 500 | 400 | 320 |
| | 54 | 27 | 1256 | 648 | 324 | 162 |
| | 28 | 8 | 2401 | 686 | 196 | 56 |
| | 8 | 1 | 4096 | 512 | 64 | 8 |
| 10 | 81 | 729 | 1 | 9 | 81 | 729 |
| | 128 | 512 | 16 | 64 | 256 | 1024 |
| | 147 | 343 | 81 | 189 | 441 | 1029 |
| | 144 | 216 | 256 | 384 | 576 | 864 |
| | 125 | 125 | 625 | 625 | 625 | 625 |
| | 96 | 64 | 1296 | 864 | 576 | 384 |
| | 63 | 27 | 2401 | 1029 | 441 | 189 |
| | 32 | 8 | 4096 | 1024 | 256 | 64 |
| | 9 | 1 | 6561 | 729 | 81 | 9 |

| t | $r^4$ | $a^5$ | $a^4r$ | $a^3r^2$ | $a^2r^3$ | $ar^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2401 | 1 | 7 | 49 | 343 | 2401 |
| | 1296 | 32 | 96 | 288 | 864 | 2592 |
| | 625 | 243 | 405 | 675 | 1125 | 1875 |
| | 256 | 1024 | 1024 | 1024 | 1024 | 1024 |
| | 81 | 3125 | 1875 | 1125 | 675 | 405 |
| | 16 | 7776 | 2592 | 864 | 288 | 96 |
| | 1 | 16807 | 2401 | 343 | 49 | 7 |
| 9 | 4096 | 1 | 8 | 64 | 512 | 4096 |
| | 2401 | 32 | 112 | 392 | 1372 | 4802 |
| | 1296 | 243 | 486 | 972 | 1944 | 3888 |
| | 625 | 1024 | 1280 | 1600 | 2000 | 2500 |
| | 256 | 3125 | 2500 | 2000 | 1600 | 1280 |
| | 81 | 7776 | 3888 | 1944 | 972 | 486 |
| | 16 | 16807 | 4802 | 1372 | 392 | 112 |
| | 1 | 32768 | 4096 | 512 | 6 | 8 |
| 10 | 6561 | 1 | 9 | 81 | 729 | 6561 |
| | 4096 | 32 | 128 | 512 | 2048 | 8192 |
| | 2401 | 243 | 567 | 1323 | 3087 | 7203 |
| | 1296 | 1024 | 1536 | 2304 | 3456 | 5184 |
| | 625 | 3125 | 3125 | 3125 | 3125 | 3125 |
| | 256 | 7776 | 5184 | 3456 | 2304 | 1536 |
| | 81 | 16807 | 7203 | 3087 | 1323 | 567 |
| | 16 | 32768 | 8192 | 2048 | 512 | 128 |
| | 1 | 59049 | 6561 | 729 | 81 | 9 |

| *t* | *r5* | *a6* | *a5r* | *a4r2* | *a3r3* |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 16807 | 1 | 7 | 49 | 343 |
| | 7776 | 64 | 192 | 576 | 1728 |
| | 3125 | 729 | 1215 | 2025 | 3375 |
| | 1024 | 4096 | 4096 | 4096 | 4096 |
| | 243 | 15625 | 9375 | 5625 | 3375 |
| | 32 | 46656 | 15552 | 5084 | 1728 |
| | 1 | 117649 | 16807 | 401 | 343 |
| 9 | 32768 | 1 | 8 | 64 | 512 |
| | 16807 | 64 | 224 | 784 | 2744 |
| | 7776 | 729 | 1458 | 2916 | 5832 |
| | 3125 | 4096 | 5120 | 6400 | 8000 |
| | 1024 | 15625 | 12500 | 10000 | 8000 |
| | 243 | 46656 | 233 8 | 11664 | 5832 |
| | 32 | 117649 | 33614 | 9604 | 2744 |
| | 1 | 262144 | 32768 | 4096 | 512 |
| 10 | 59049 | 1 | 9 | 81 | 729 |
| | 32768 | 64 | 256 | 1024 | 4096 |
| | 16807 | 729 | 1701 | 3969 | 9261 |
| | 7776 | 4096 | 6144 | 9216 | 13824 |
| | 3125 | 15625 | 15625 | 15625 | 15625 |
| | 1024 | 46656 | 31104 | 20736 | 13824 |
| | 243 | 117649 | 50421 | 21609 | 9261 |
| | 32 | 262144 | 65536 | 16384 | 4096 |
| | 1 | 531441 | 59049 | 6561 | 729 |

*a2r4*

| $t$ | $a^2r^4$ | $ar^5$ | $r^6$ | $a^7$ | $a^6r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2401 | 16807 | 117649 | 1 | 7 |
| | 5084 | 15552 | 46656 | 128 | 384 |
| | 5625 | 9375 | 15625 | 2187 | 3645 |
| | 4096 | 4096 | 4096 | 16384 | 16384 |
| | 2025 | 1215 | 729 | 78125 | 46875 |
| | 576 | 192 | 64 | 279936 | 93312 |
| | 49 | 7 | 1 | 823543 | 117649 |
| 9 | 4096 | 32768 | 262144 | 1 | 8 |
| | 9604 | 33614 | 117649 | 128 | 448 |
| | 11664 | 23328 | 46656 | 2187 | 4374 |
| | 10000 | 12500 | 15625 | 16384 | 20480 |
| | 6400 | 5120 | 4096 | 78125 | 62500 |
| | 2916 | 1458 | 729 | 279936 | 139968 |
| | 784 | 224 | 64 | 823543 | 235298 |
| | 64 | 8 | 1 | 2097152 | 262144 |
| 10 | 6561 | 59049 | 531441 | 1 | 9 |
| | 16384 | 65536 | 262144 | 128 | 512 |
| | 21609 | 50421 | 117649 | 2187 | 5103 |
| | 20736 | 31104 | 46656 | 16384 | 24576 |
| | 15625 | 15625 | 15625 | 78125 | 78125 |
| | 9216 | 6144 | 4096 | 279936 | 186624 |
| | 3969 | 1701 | 729 | 823543 | 352947 |
| | 1024 | 256 | 64 | 2097152 | 524288 |
| | 81 | 9 | 1 | 4782969 | 531441 |

| t | a5r2 | a4r3 | a3r4 | a2r5 | ar6 | r7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 |
| | 1152 | 3456 | 10168 | 31104 | 93312 | 279936 |
| | 6075 | 10125 | 16875 | 28125 | 46875 | 78125 |
| | 16384 | 16384 | 16384 | 16384 | 16384 | 16384 |
| | 28125 | 16875 | 10125 | 6075 | 3645 | 2187 |
| | 31104 | 10168 | 3456 | 1152 | 384 | 128 |
| | 16807 | 2401 | 343 | 49 | 7 | 1 |
| 9 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 |
| | 1568 | 5488 | 19208 | 67228 | 235298 | 823543 |
| | 8748 | 17496 | 34992 | 69984 | 139968 | 279936 |
| | 25600 | 32000 | 40000 | 50000 | 62500 | 78125 |
| | 50000 | 40000 | 32000 | 25600 | 20480 | 16384 |
| | 69984 | 34992 | 17496 | 8748 | 4374 | 2187 |
| | 67228 | 19208 | 5488 | 1568 | 448 | 128 |
| | 32768 | 4096 | 512 | 64 | 8 | 1 |
| 10 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 |
| | 2048 | 8192 | 32768 | 131072 | 524288 | 2097152 |
| | 11907 | 27783 | 64827 | 151263 | 352947 | 823543 |
| | 36864 | 55296 | 82944 | 124416 | 186624 | 279936 |
| | 78125 | 78125 | 78125 | 78125 | 78125 | 78125 |
| | 124416 | 82944 | 55296 | 36864 | 24576 | 16384 |
| | 151263 | 64827 | 27783 | 11907 | 5103 | 2187 |
| | 131072 | 32768 | 8192 | 2048 | 512 | 128 |
| | 59049 | 6561 | 729 | 81 | 9 | 1 |

| t | a8 | a7r | a6r2 | a5r3 | a4r4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 7 | 49 | 343 | 2401 |
| | 256 | 768 | 2304 | 6912 | 19936 |
| | 6561 | 10935 | 18225 | 30375 | 50625 |
| | 65536 | 65536 | 65536 | 65536 | 65536 |
| | 390625 | 234375 | 140625 | 84375 | 50625 |
| | 1679616 | 559872 | 186624 | 61008 | 19936 |
| | 5764801 | 823543 | 117649 | 16807 | 2401 |
| 9 | 1 | 8 | 64 | 512 | 4096 |
| | 256 | 896 | 3136 | 10976 | 38416 |
| | 6561 | 13122 | 26244 | 52488 | 104976 |
| | 65536 | 81920 | 102400 | 128000 | 160000 |
| | 390625 | 312500 | 250000 | 200000 | 160000 |
| | 1679616 | 839808 | 419904 | 209952 | 104976 |
| | 5764801 | 1647086 | 470596 | 134456 | 38416 |
| | 16777216 | 2097152 | 262144 | 32768 | 4096 |
| 10 | 1 | 9 | 81 | 729 | 6561 |
| | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| | 6561 | 15309 | 35721 | 83349 | 194481 |
| | 65536 | 98304 | 147456 | 221184 | 331776 |
| | 390625 | 390625 | 390625 | 390625 | 390625 |
| | 1679616 | 1119744 | 746496 | 497664 | 331776 |
| | 5764801 | 2470629 | 1058841 | 453789 | 194481 |
| | 16777216 | 4194304 | 1048576 | 262144 | 65536 |
| | 43046721 | 4782969 | 531441 | 59049 | 6561 |

| 1 | $a^3r^5$ | $a^2r^6$ | $ar^7$ | $r^8$ |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764801 |
| | 61008 | 186624 | 559872 | 1679616 |
| | 84375 | 140625 | 234375 | 390625 |
| | 65536 | 65536 | 65536 | 65536 |
| | 30375 | 18225 | 10935 | 6561 |
| | 6912 | 2304 | 768 | 256 |
| | 343 | 49 | 7 | 1 |
| 9 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| | 134456 | 470596 | 1647086 | 5764801 |
| | 209952 | 419904 | 839808 | 1679616 |
| | 200000 | 250000 | 312500 | 390625 |
| | 128000 | 102400 | 81920 | 65536 |
| | 52488 | 26244 | 13122 | 6561 |
| | 10976 | 3136 | 896 | 256 |
| | 512 | 64 | 8 | 1 |
| 10 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 |
| | 262144 | 1048576 | 4194304 | 16777216 |
| | 453789 | 1058841 | 2470629 | 5764801 |
| | 497664 | 746496 | 1119744 | 1679616 |
| | 390625 | 390625 | 390625 | 390625 |
| | 221184 | 147456 | 98304 | 65536 |
| | 83349 | 35721 | 15309 | 6561 |
| | 16384 | 4096 | 1024 | 256 |
| | 729 | 81 | 9 | 1 |

| 1 | a9 | a8r | a7r2 | a6r3 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 7 | 49 | 343 |
| | 512 | 1536 | 6408 | 13824 |
| | 19683 | 32805 | 54675 | 91125 |
| | 262144 | 262144 | 262144 | 262144 |
| | 1953125 | 1171875 | 703125 | 421875 |
| | 10077696 | 3349232 | 1119744 | 366048 |
| | 40353607 | 5764861 | 823543 | 117649 |
| 9 | 1 | 8 | 64 | 512 |
| | 512 | 1792 | 6272 | 21952 |
| | 19683 | 39366 | 78732 | 157464 |
| | 262144 | 327680 | 409600 | 512000 |
| | 1953125 | 1562500 | 1250000 | 1000000 |
| | 10077696 | 5038848 | 2519424 | 1259712 |
| | 40353607 | 11529602 | 3294172 | 941192 |
| | 134217728 | 16777216 | 2097152 | 262144 |
| 10 | 1 | 9 | 81 | 729 |
| | 512 | 2048 | 8192 | 32768 |
| | 19683 | 45927 | 107163 | 250047 |
| | 262144 | 393216 | 589824 | 884736 |
| | 1953125 | 1953125 | 1953125 | 1953125 |
| | 10077696 | 6718464 | 4478976 | 2985984 |
| | 40353607 | 17294403 | 7411887 | 31765-3 |
| | 134217728 | 33554432 | 8388608 | 2097152 |
| | 387420489 | 43046721 | 4782969 | 531441 |

| t | a5r4 | a4r5 | a3r6 | a2r7 | ar8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764861 |
| | 39872 | 124416 | 366048 | 1119744 | 3349232 |
| | 151875 | 253125 | 421875 | 703125 | 1171875 |
| | 262144 | 262144 | 262144 | 262144 | 262144 |
| | 253125 | 151875 | 91125 | 54675 | 32805 |
| | 124416 | 39872 | 13824 | 4608 | 1536 |
| | 16807 | 2401 | 343 | 49 | 7 |
| 9 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| | 76832 | 268912 | 941192 | 3294172 | 11529602 |
| | 314928 | 629856 | 1259712 | 2519424 | 5038848 |
| | 640000 | 800000 | 1000000 | 1250000 | 1562500 |
| | 800000 | 640000 | 512000 | 409600 | 327680 |
| | 629856 | 314928 | 157464 | 78732 | 39366 |
| | 268912 | 76832 | 21952 | 6272 | 1792 |
| | 32768 | 4096 | 512 | 64 | 8 |
| 10 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 |
| | 131072 | 524288 | 2097152 | 8388608 | 33554432 |
| | 583443 | 1361367 | 3176523 | 7411887 | 17294403 |
| | 1327104 | 1990656 | 2985984 | 4478976 | 6718464 |
| | 1953125 | 1953125 | 1953125 | 1953125 | 1953125 |
| | 1990656 | 1327104 | 884736 | 589824 | 393216 |
| | 1361367 | 583443 | 250047 | 107163 | 45927 |
| | 524288 | 131072 | 32768 | 8192 | 2048 |
| | 59049 | 6561 | 729 | 81 | 9 |

| t | r9 | a10 | a9r | a8r2 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 40353607 | 1 | 7 | 49 |
| | 10077696 | 1024 | 3072 | 9216 |
| | 1953125 | 59049 | 98415 | 164025 |
| | 262144 | 1048576 | 1048576 | 1048576 |
| | 19683 | 9765625 | 5859375 | 3515625 |
| | 512 | 60466176 | 20155392 | 6698464 |
| | 1 | 282475249 | 40353607 | 5764861 |
| 9 | 134217728 | 1 | 8 | 64 |
| | 40353607 | 1024 | 3584 | 12544 |
| | 10077696 | 59049 | 118098 | 236196 |
| | 1953125 | 1048576 | 1310720 | 1638400 |
| | 262144 | 9765625 | 7812500 | 6250000 |
| | 19683 | 60466176 | 30233088 | 15116544 |
| | 512 | 282475249 | 80707214 | 23059204 |
| | 1 | 1073741824 | 134217728 | 16777216 |
| 10 | 387420489 | 1 | 9 | 81 |
| | 134217728 | 1024 | 4096 | 16384 |
| | 40353607 | 59049 | 137781 | 321489 |
| | 10077696 | 1048576 | 1572864 | 2359296 |
| | 1953125 | 9765625 | 9765625 | 9765625 |
| | 262144 | 60466176 | 40310784 | 26873856 |
| | 19683 | 282475249 | 121060821 | 51883209 |
| | 512 | 1073741824 | 268435456 | 67108864 |
| | 1 | 3486784401 | 387420489 | 43046721 |

| t | a7r3 | a6r4 | a5r5 | a4r6 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 |
| | 27648 | 79744 | 248832 | 746496 |
| | 273375 | 455625 | 759375 | 1265625 |
| | 1048576 | 1048576 | 1048576 | 1048576 |
| | 2109375 | 1265625 | 759375 | 455625 |
| | 2196288 | 746496 | 248832 | 79744 |
| | 823543 | 117649 | 16807 | 2401 |
| 9 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 |
| | 43904 | 153664 | 537824 | 1882384 |
| | 472392 | 944784 | 1889566 | 3779136 |
| | 2048000 | 2560000 | 3200000 | 4000000 |
| | 5000000 | 4000000 | 3200000 | 2560000 |
| | 7558272 | 3779136 | 1889566 | 944784 |
| | 6588344 | 1882384 | 537824 | 153664 |
| | 2097152 | 262144 | 32768 | 4096 |
| 10 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 |
| | 65536 | 262144 | 1048576 | 4194304 |
| | 750141 | 1750329 | 4084101 | 9529569 |
| | 3538944 | 5308416 | 7962624 | 11943936 |
| | 9765625 | 9765625 | 9765625 | 9765625 |
| | 17915904 | 11943936 | 7962624 | 5308416 |
| | 22235661 | 9529569 | 4084101 | 1750329 |
| | 16777216 | 4194304 | 1048576 | 262144 |
| | 4782969 | 531441 | 59049 | 6561 |

| t | $a^3r^7$ | $a^2r^8$ | $ar^9$ | $r^{10}$ |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 823543 | 5764861 | 40353607 | 282475249 |
| | 2196288 | 6698464 | 20155392 | 60466176 |
| | 2109375 | 3515625 | 5859375 | 9765625 |
| | 1048576 | 1048576 | 1048576 | 1048576 |
| | 164025 | 164025 | 98415 | 59049 |
| | 9216 | 9216 | 3072 | 1024 |
| | 49 | 49 | 7 | 1 |
| 9 | 2097152 | 16777216 | 134217728 | 1073741824 |
| | 6588344 | 23059204 | 80707214 | 282475249 |
| | 7558272 | 15116544 | 30233088 | 60466176 |
| | 5000000 | 6250000 | 7812500 | 9765625 |
| | 2048000 | 1638400 | 1310720 | 1048576 |
| | 472392 | 236196 | 118098 | 59049 |
| | 43904 | 12544 | 3584 | 1024 |
| | 512 | 64 | 8 | 1 |
| 10 | 4782969 | 43046721 | 387420489 | 3486784401 |
| | 16777216 | 67108864 | 268435456 | 1073741824 |
| | 22235661 | 51883209 | 121060821 | 282475249 |
| | 17915904 | 26873856 | 40310784 | 60466176 |
| | 9765625 | 9765625 | 9765625 | 9765625 |
| | 3538944 | 2359296 | 1572864 | 1048576 |
| | 750141 | 321489 | 137781 | 59049 |
| | 65536 | 16384 | 4096 | 1024 |
| | 729 | 81 | 9 | 1 |

In præcedenti tabula progreſſiuas quantitates expandimus: in ſequenti colligimus, cuiuſque numeri maſſas ex omnibus eiuſdem appellationis proportionalibus, pro vnaquaque numeri abſciſſione ſupra ſingillatim acceptis: videlicet maſſam ex omnibus abſciſſis, quàm ſignificamus charactere *O.a*; & maſſam ex omnibus reſiduis, *O.r*; & maſſam ex omnibus abſciſſis ſecundis *O.a2*; & maſſam ex omnibus vniprimis *O.ar*; & maſſam ex omnibus reſiduis ſecundis, *O.r3*; & reliquas deinceps, quatenus præcedens tabula expanditur.

| | O.r | O.r2 | | O.r3 | O.ar2 | O.r4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t | O.a | O.a2 | O.ar | O.a3 | O.a2r | O.a4 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 5 | 4 | 9 | 6 | 17 |
| 4 | 6 | 14 | 10 | 36 | 20 | 98 |
| 5 | 10 | 30 | 20 | 100 | 50 | 354 |
| 6 | 15 | 55 | 35 | 225 | 105 | 979 |
| 7 | 21 | 91 | 56 | 441 | 196 | 2275 |
| 8 | 28 | 140 | 84 | 784 | 336 | 4676 |
| 9 | 36 | 204 | 120 | 1296 | 540 | 8772 |
| 10 | 45 | 285 | 165 | 2025 | 825 | 15333 |

| t | O.ar3<br>O.a3r | O.a2r2. | O.r5<br>O.a5 | O.ar4<br>O.a4r | O.a2r3<br>O.a3r2 | O.r6<br>O.a6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 10 | 8 | 33 | 18 | 12 | 65 |
| 4 | 46 | 34 | 276 | 116 | 68 | 794 |
| 5 | 146 | 104 | 1300 | 470 | 260 | 4890 |
| 6 | 371 | 259 | 4425 | 1449 | 777 | 20515 |
| 7 | 812 | 560 | 12201 | 3724 | 1960 | 67171 |
| 8 | 1596 | 1092 | 29008 | 8400 | 4368 | 184820 |
| 9 | 2892 | 1968 | 61776 | 17172 | 8856 | 446964 |
| 10 | 4917 | 3333 | 120825 | 32505 | 16665 | 978405 |

| t | O.ar5<br>O.a5r | O.a2r4<br>O.a4r2 | O.a3r3 | O.r7<br>O.a7 | O.ar6<br>O a6r |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 34 | 20 | 16 | 129 | 66 |
| 4 | 310 | 154 | 118 | 2316 | 860 |
| 5 | 1610 | 740 | 560 | 18700 | 5750 |
| 6 | 6035 | 2659 | 2003 | 96825 | 26265 |
| 7 | 18236 | 7832 | 5888 | 376761 | 93436 |
| 8 | 47244 | 19856 | 14988 | 1200304 | 278256 |
| 9 | 109020 | 45528 | 34176 | 3297456 | 725220 |
| 10 | 229845 | 95205 | 71445 | 8080425 | 1703625 |

| t | O.a2r5<br>O.a5r2 | O.a3r4<br>O.a4r3 | O.r8<br>O.a8 | O.ar7<br>O.a7r | O.a2r6<br>O.a6r2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 36 | 24 | 257 | 130 | 68 |
| 4 | 380 | 236 | 6818 | 2446 | 994 |
| 5 | 2300 | 1400 | 72354 | 21146 | 7604 |
| 6 | 9945 | 6009 | 462979 | 117971 | 39619 |
| 7 | 34216 | 20608 | 2142595 | 494732 | 159320 |
| 8 | 99696 | 59752 | 7907396 | 1695036 | 531012 |
| 9 | 255960 | 153792 | 24684612 | 4992492 | 1534488 |
| 10 | 594825 | 357225 | 67731333 | 13072917 | 3963333 |

| t | O.a3r5<br>O.a5r3 | O.a4r4 | O.r9<br>O.a9 | O.ar8<br>O.a8r |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 40 | 32 | 513 | 258 |
| 4 | 526 | 418 | 20196 | 7076 |
| 5 | 3896 | 3104 | 282340 | 79430 |
| 6 | 20051 | 16003 | 2235465 | 542409 |
| 7 | 80192 | 64064 | 12313161 | 2685004 |
| 8 | 265356 | 211460 | 52666768 | 10582460 |
| 9 | 769152 | 614976 | 186884496 | 35277012 |
| 10 | 1984917 | 1587334 | 574304985 | 103008345 |

| t | O.a2r7 O.a7r2 | O.a3r6 O.a6r3 | O.a4r5 O.a5r4 | O.r10 O.a10 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 132 | 72 | 48 | 1025 |
| 4 | 2708 | 1268 | 836 | 60074 |
| 5 | 26300 | 11720 | 7760 | 1108650 |
| 6 | 165417 | 72297 | 48009 | 10874275 |
| 7 | 778120 | 337120 | 224224 | 71340451 |
| 8 | 2967888 | 1273008 | 851640 | 353815700 |
| 9 | 9655416 | 4154976 | 2766692 | 1427557524 |
| 10 | 27720825 | 11912505 | 7936665 | 4914341925 |

| t | O.ar9 O.a9r | O.a2r8 O.a8r2 | O.a3r7 O.a7r3 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 514 | 260 | 136 |
| 4 | 20710 | 7594 | 3238 |
| 5 | 303050 | 94100 | 37400 |
| 6 | 2538515 | 715939 | 276563 |
| 7 | 14850676 | 3943352 | 1503488 |
| 7 | 67518444 | 17200816 | 6479148 |
| 9 | 254402940. | 63090168 | 23809576 |
| 1c | 828707925 | 201375525 | 75832725 |

| t | O.a4r6<br>O.a6r4 | O.a5r5. |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 80 | 64 |
| 4 | 1834 | 1510. |
| 5 | 21200 | 17600 |
| 6 | 157269 | 130835 |
| 7 | 856352 | 713216 |
| 8 | 3716116 | 3098604 |
| 9 | 13596208 | 11320316 |
| 10 | 4329[illegible]325 | 35844325 |

His paratis, experire, si vera sunt, quæ proponimus theoremata, sub 5. 2. exempli gratia, tertium.

*O.6a2: 2t3—3t2+t.*

idest, massa ex omnibus sexcuplis abscissis secundis cuiusq; totæ, est æqualis duplæ totæ tertiæ, dempta tripla tota secunda, addita ipsa tota.

Nota, quod interpunctio colon (:) nobis vsuuenit ad significandam æqualitatem.

Esto

| | | |
|---|---|---|
| Eſto tota | $t$: | 7 |
| ideoque | $t2$: | 49 |
| | $t3$: | 343 |
| | $O.a2$: | 91 |
| | $2t3$: | 686 |
| | $t$: | 7 |
| | $2t3+t$: | 693 |
| | $-3t2$: | 147 |
| | $O.6a2$: | 546 |

Item quartum $O.6ar$: $t3-t$:
ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis vniprimis cuiuſque totæ, eſt æqualis totæ tertiæ, dempta ipſa tota.

| | | |
|---|---|---|
| Eſto tota | $t$: | 9 |
| ideoque | $t3$: | 729 |
| | $O.ar$: | 120 |
| | $t3$: | 729 |
| | $-t$: | 9 |
| | $O.6ar$: | 720 |

Item decimumſextum

$$O.420a3r3: 3t7+7t3-10t.$$

Eſto

| | | |
|---|---|---|
| Esto tota | $t$: | 10 |
| ideoque | $t3$: | 1000 |
| | $t7$: | 10000000 |
| | $O.a3r3$: | 71445 |
| | $3t7$: | 30000000 |
| | $7t3$: | 7000 |
| | $3t7+7t3$: | 30007000 |
| | $-10t$: | 100 |
| | 60) | 30006900 |
| | 7) | 500115 |
| | $Oa3r3$: | 71445 |

Similiter alia sub eadem 5. 2. atque sub alijs eiusdem elementi propositionibus theoremata facile poteris probare, ope tabularum præcedentium.

Sed ne quidquam tibi desit, accipe, pro huius capitis coronide, tabellam speciosam, expensam, vsque ad decimam basim. Vocamus autem speciem vnamquamlibet massam, in qua colliguntur cuiusque totæ, omnes, eiusdem appellationis proportionales, pro singulis abscissionibus acceptæ: & ex speciebus ordinatam tabulam triangularem similem tabulæ proportionalium, speciosam nuncupamus.

Ta-

## Tabula Speciosa.

O.u.
O.a O.r.
O.a2 O.ar O.r2.
O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3.
O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4.
O.a5 Oa4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5.
O.a6 O.a5r O.a4r2 O.a3r3 O.a2r4 O.ar5 O.r6.
O.a7 O.a6r O.a5r2 O.a4r3 O.a3r4 O.a2r5 O.ar6. O.r7.
O.a8 O.a7r O.a6r2 O.a5r3 O.a4r4 O.a3r5 O.a2r6 O.ar7 O.r8.
O.a9 O.a8r O.a7r2. O.a6r3 O.a5r4 O.a4r5 O.a3r6 O.a2r7 O.ar8 O.r9.
O.a10 O.a9r O.a8r2 O.a7r3 O.a6r4 O.a5r5 O.a4r6 O.a3r7 O.a2r8 O.ar9 O.r10.

Cap.

Cap. 3.

Tertium pro tertio elemento, est quædam animaduersio indeterminatarum determinabilium rationum: quarum te iam habere conceptum, facilè demonstro; vt interim animaduertas.

Cum scripsero *O.a*, statim ex præcedenti capite habes massam ex omnibus abscissis: sed quota sit hæc massa, nondum habes, nisi scripsero, cuius numeri sit massa. Quod si assignauero *O.a*, numeri *t* massam esse; neque sic habes, quota sit, nisi simul assignauero, quotus est numerus, valor litteræ *t*. Neque si assignauero *O.a*, eius numeri massam esse, cuius *t2* est secunda potestas: neque si *O.a*, massam eius numeri dixero, cuius *t3* est tertia potestas; nisi aut litteræ *t*, aut characteris *t2*, vel *t3*, quotus valor sit, certò certiùs assignauero. Similiter cum scripsero *O.r*, habes massam ex omnibus residuis: sed quantitatem eius non habes. Cum verò licentiam dedero, vt quotum quemque litteræ *t* valorem taxes; tuque huiusmodi vsus licentia dixeris, *t* valere quinario: statim profectò assignabis & *O.a*, valere 10; & *t2*, valere 25; & *t3*, valere 125; & *O.r*, valere 10; & determinatæ litteræ *t*, determinatas esse quantitates *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*. Quare data licentia antequam vsus fueris, habebas profectò *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*, quantitates indeterminatas determinabiles.

Rursum cum scripsero duas eiusdem numeri Massas *O.a*, & *O.r*, esse æquales; aut massam *O.a*, ad *t2*—*t* dimidiã esse; neque tamen assignauero, quotus litteræ *t* sit va-

lor; dederimque aſſignandi licentiam: antequam vtaris licentia, profectò habes determinatam eſſe rationem dimidiam, indeterminatæ quantitatis *O.a*, ad indeterminatam quantitatem *t2*---*t*. Quæ quidem theoremata interim mihi credis ante demonſtrationem, ex inductione exemplorum; atque ita ex determinatione: ſed cum in ſecundo elemento demõſtrauero; tunc citra omnem inductionem, & ante determinationem valoris litteræ *t*, indubitanter vtraque aſſeuerabis. Habes ergo inter indeterminatas quantitates, determinatas rationes.

Sed ſi quæſiero, quænam ſit ratio Maſſæ *O.a*, cuiuſpiam numeri *t*, ad *t2*; aut Maſſæ *O.2a*, ad *t2*; aut Maſſæ *O.a*, ad *t*; aut maſſæ *O.a*, ad *t3*: ad has profectò interrogationes, data licentia vſus, cum taxaueris litteræ *t* valorem, tunc determinatam aſſignabis rationem; ſed non eamdem ſemper, ad eamdem quæſtionem. Siquidem litteram *t*, taxaueris valere 3; pro ratione *O.a*, ad *t2*, reſpondebis, 3 ad 9: qui ſi taxaueris litteram *t* valere 4; ad eamdem quæſtionem reſpondebis 6 ad 16: quæ non eſt eadem ratio 3 ad 9. item pro alijs valoribus, aliam reſpondebis rationem. Itaque data licentia taxandi litteram *t*, antequam taxaueris, habes rationem *O.a* ad *t2* indeterminatam determinabilem.

Interim notandum eſt, poſſibiles reſponſiones ad quæſtionem propoſitam, pro varijs litteræ *t* valoribus, ordinatim ſemper maioribus; varias, & ſemper ordinatim maiores eſſe: dimidia quidem ratione ſemper minores; ad

ipſam

ipsam verò dimidiam semper propiùs accedentes.

| Pro litteræ $t$ valore | $O.a$ ad | $t2$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 |
| 3 | 3 | 9 |
| 4 | 6 | 16 |
| 5 | 10 | 25 |
| 6 | 15 | 36 |
| 7 | 21 | 49 |
| 8 | 28 | 64 |
| 9 | 36 | 81 |
| 10 | 45 | 100 |

Quod si propositæ quæstioni potuerit, pro quodam valore assignabili responderi ratio propior dimidiæ, quàm alia quælibet; dicetur ipsa indeterminata ratio $O.a$ ad $t2$, quasi dimidia.

Similiter $O.2a$ ad $t2$, ratio est indeterminata determinabilis. nam

| Pro litteræ $t$ valore | $O.2a$ ad | $t2$ |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 6 | 9 |
| 4 | 12 | 16 |
| 5 | 20 | 25 |
| 6 | 30 | 36 |
| 7 | 42 | 49 |

| Pro litteræ *t* valore | *O.2a* | ad *t2* |
|---|---|---|
| 8 | 56 | 64 |
| 9 | 72 | 81 |
| 10 | 90 | 100 |

atque ita semper minoris inæqualitatis est ratio: sed eò semper maior, quò pro maiore litteræ *t* valore, assignatur. Quæ ratio indeterminata determinabilis; si fuerit assignabilis propior æqualitati, quàm data quælibet inæqualitas; dicetur ratio *O.2a* ad *t2*, quasi æqualitas.

| Item pro litteræ *t* valore | *O.a* | ad *t* |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 6 | 4 |
| 5 | 10 | 5 |
| 6 | 15 | 6 |
| 7 | 21 | 7 |
| 8 | 28 | 8 |
| 9 | 36 | 9 |
| 10 | 45 | 10 |

est ratio indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, semper maior, quæ si fuerit assignabilis maior, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t*, quasi infinita.

De-

| Denique pro litteræ $t$ valore | $O.a$ ad $t3$ | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 8 |
| 3 | 3 | 27 |
| 4 | 6 | 64 |
| 5 | 10 | 125 |
| 6 | 15 | 216 |
| 7 | 21 | 343 |
| 8 | 28 | 512 |
| 9 | 36 | 729 |
| 10 | 45 | 1000 |

eſt indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ $t$ valore, ſemper minor: quæ ſi fuerit aſſignabilis minor, quàm data quælibet; dicetur ratio $O.a$ ad $t3$, quaſi nulla.

*Cap.* 4.

Quartum, pro quarto elemento, eſt animaduerſio *def.* 10. *lib.* 5. *Elem. Eucl.* & *def.* 5. *lib.* 6. in quibus modus quantitatis rationum aſſumitur; illi quidem ſuperinductus, ſecundum quæm maiores, vel minores rationes dicuntur, *def.* 8. *lib.* 5. ſed ab illo longè alius; & ſecundum quem propiores æqualitati, aut remotiores ab æqualitate rationes dicimus.

Modum autem quantitatis, in vnoquoque genere, concipimus ex duobus. vno: ſecundum quod res eiuſdem generis inuicem ſunt componibiles, vt faciant eiuſdem generis

neris aliam rem, in eiusdem modi comparatione grandiorem. altero; secundum quod res eadem, secum ipsa altera, composita aliquoties, facit rem eiusdem generis, in eiusdem modi comparatione, æquètoties grandiorem. Sic calor calori adpositus, facit calidum calidius: & calor simul aliquoties iteratus, facit æquèmultoties calidius calidium. item lumen lumini adpositum, facit luminosius luminosum: idemque lumen simul aliquoties iteratum, facit æquemultoties luminosius luminosum.

Similiter ratio inæqualitatis maioris, alij maioris inæqualitatis rationi adposita, componit rationem maioris inæqualitatis, & magis maioris inęqualitatis, idest magis ab æqualitate remotæ, *ex def.* 5.6. Et ratio maioris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò maioris inæqualitatis æquemultiplicatam, idest æquemultò remotiorem ab æqualitate, *ex def.* 10.5. Quare maioris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis secundum quem magis vel minùs maioris sunt inæqualitatis, idest, magis, vel minùs ab æqualitate distantes.

Eodemque modo, ratio minoris inæqualitatis, alij minoris inæqualitatis rationi adposita facit rationem minoris inæqualitatis, & magis minoris inæqualitatis, idest remotioris ab æqualitate *ex def.* 5.6. Et ratio minoris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò minoris inæqualitatis ęquemultiplicatam, idest æquemultò remotioris ab æqualitate, *ex def.* 10.5.

Quare

Quare minoris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis, secundum quem magis, vel minùs minoris sunt inæqualitatis, ideſt ſecundum quem magis, vel minùs ab æqualitate diſtant.

Porrò quantum ad hunc modum attinet quantitatis, notandum eſt, rationum quaſi tria genera eſſe. Primum æqualitatis, cui talis modus non conuenit, neque ſeorſim ipſi, neque ſibi & alijs, tamquam vnius generis rationibus: nam æqualitas æqualitati adpoſita, eamdem componit æqualitatem; & maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis rationi adpoſita, eamdem inæqualitatis facit rationem. Secundum, maioris inęqualitatis. Tertium, minoris inæqualitatis; quibus tales modos conuenire ſingulis demonſtrauimus: ſed non vtriſque, vt vni generi. nam maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis rationes adpoſitæ, nec magis maioris, nec magis minoris inæqualitatis componunt rationes.

*Cap.* 5.

Quintum pro quinto elemento eſt inquiſitio quantitatis quæ cuiuſque rationis non ex hypotheſi eſt propria, ſed naturaliter, & citra omnem hypotheſim: altioris rationis, maior; depreſſioris, minor; æquealtæ, eadem; multiplicatæ, æquemultiplex; & ſubmultiplicatæ, æqueſubmultiplex: quam logarithmnm vocamus; & nos in quinto elemento, diligenter; quantùm potuimus, perſecuti, non hucuſque quidem attigimus, tamen viam inueniendi aperuimus. Id quod primùm in ratione dupla, ita conabor explicare.

Accipe

Accipe feriem infinitam omnium fractionum,in quibus vnitas, & omnes numeri denominant vnitatem:quarum in characteribus,cum confueuerit numerator,fcribi fupra denominatorem interueniente lineola, fic.

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$ &c.

nos aliter. fcripfimus enim primùm numeratorem, deinde ftatim adfcripfimus denominatorem inter parentheses claufum: quod compofitioni typographycæ longè commodius cum fit,lectioni etiam tum in latino fermone, tum in noftro Italico idiomate, magis conuenit.

1(1), 1(2), 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), 1(7), 1(8), 1(9), 1(10), 1(11), 1(12), 1(13), 1(14), 1(15), 1(16), &c.

Et in accepta ferie fume terminos,duplam habentes rationem, fimplos, dimidios, fubtriplos, fubquadruplos, aliofque fubmultiplos deinceps. Et inter extremos, accipe in eadem ferie medios quofque, quorum & maioris extremi fumma dicetur hyperlogarithmus, eo quod fuperet logarithmum; eorumdem verò mediorum, & minoris extremi fumma, dicetur hypologarithmus; eo quod fuperetur à logarithmo.

Itaque duplæ rationis hyperlogarithmi funt, qui fequuntur: primus inter fimplos & maximos; & reliqui deinceps ordinatum inter minores, & fubmultiplos.

1(1).

1(1).
1(2) 1(3).
1(3) 1(4) 1(5).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).

& reliqui in infinitum: quorum inter simplo hyperlogarithmus est maximus, & reliqui deinceps ordinatim minores.

Item duplæ rationis hypologarithmi sunt qui sequuntur primus inter simplos, & maximos, & deinceps reliqui

1(2).
1(3) 1(4).
1(4) 1(5) 1(6).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).

& in infinitum: quorum inter simplos hypologarithmus est minimus, & reliqui deinceps ordinatim sunt maiores.

Est autem assignatorum quotcunque minimus hyperlogarithmorum, maior quàm maximus hypologarithmorum: & differentia æqualis minimo assumptorum extremorum rationis duplæ. cum autem possit assumi minor extremus, quàm data quælibet quantitas; possunt consequenter assumi termini duplam inter se rationem habentes, quorum hyperlogarithmi, & hypologarithmi differentia minor, quam data quælibet quantitas. vnde hyperlogarithmus, & hypologarithmus, quasi sunt æquales.

Porrò logarithmus illa est quantitas, ad quam tendunt

hyperlogarithmi, cum ſemper deinceps minuuntur, & ad quam tendunt hypologarithmi, cum ſemper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, & omni maior hypologarithmo.

Similiter, ſeſquialteræ rationis hyperlogarithmi & hypologarithmi ſunt, qui ſequuntur: & vtrorumque primus eſt inter ſimplos, & maximos; reliqui verò deinceps ordinatim inter minores, & ſubmultiplos.

Hyperlogarithmi.

1(2).
1(4) 1(5).
1(6) 1(7) 1(8).
1(8) 1(9) 1(10) 1(11).
1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14).

& deinceps alij in infinitum.

Hypologarithmi.

1(3).
1(5) 1(6).
1(7) 1(8) 1(9).
1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).

& reliqui deinceps in infinitum.

Similiter alius cuiuſque rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi ſunt aſſignabiles, quorum omnium quantitas intermedia eiuſdem rationis eſt logarithmus. Et hæc eſt ſuæ cuiuſque rationis quantitas naturalis, & earumdem, vel æquealtarum rationum eadem quantitas, ſecundum altitu-

altitudinis & depreſſionis modum in præcedenti capite fuſiùs declaratum.

Deinde altiorum rationum ſunt maiores logarithmi, & depreſſiorum minores. quod ideò patet, quia altioris hyperlogarithmi rationis, hyperlogarithmos continent depreſſioris: & hypologarithmi continent hypologarithmos.

Nam exempli gratia hyperlogarithmi ſunt rationum

| triplæ | & ſeſquialteræ |
|---|---|
| 1(1) 1(2). | 1(2). |
| 1(2) 1(3) 1(4) 1(5). | 1(4) 1(5). |
| 1(3) 1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8). | 1(6) 1(7) 1(8). |

quorum triplæ altioris hyperlogarithmi continent ſeſquialteræ depreſſioris hyperlogarithmos.

Item hypologarithmi ſunt earumdem rationum

| triplæ | & ſeſquialteræ |
|---|---|
| 1(2) 1(3). | 1(3). |
| 1(3) 1(4) 1(5) 1(6). | 1(5) 1(6). |
| 1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9). | 1(7) 1(8) 1(9). |

quorum hypologarithmi triplæ continent hypologarithmos ſeſquialteræ.

Vnde patet etiam, quod compoſitæ rationis logarithmus, eſt aggregatus componentium logarithmorum: nam & hyperlogarithmi duplæ, & ſeſquialteræ, hyperlogarithmos triplæ componunt; & hypologarithmi, hypologarithmos.

Hyperlogarithmi.

| Duplæ | Sesquialteræ. |
|---|---|
| 1(1). | 1(2). |
| 1(2) 1(3). | 1(4) 1(5). |
| 1(3) 1(4) 1(5). | 1(6) 1(7) 1(8). |
| 1(4) 1(5) 1(6) 1(7). | 1(8) 1(9) 1(10) 1(11). |

Hypologarithmi.

| Duplæ | Sesquialteræ. |
|---|---|
| 1(2). | 1(3). |
| 1(3) 1(4). | 1(5) 1(6). |
| 1(4) 1(5) 1(6). | 1(7) 1(8) 1(9). |
| 1(5) 1(6) 1(7) 1(8). | 1(9) 1(10) 1(11) 1(12). |

Sed & duplicatæ rationis duplus est logarithmus: nam duplicatæ duplæ rationis, nempe quadruplæ hyperlogarithmi ex binis duplæ rationis hyperlogarithmis aggregatis fiunt.

Hyperlogarithmi quadruplæ

| ex duplæ, | & duplæ hyperlogarithmis. |
|---|---|
| 1(1). | 1(2) 1(3). |
| 1(2) 1(3). | 1(4) 1(5) 1(6) 1(7). |
| 1(3) 1(4) 1(5). | 1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11). |

Hypologarithmi quadruplæ

| ex duplæ, | & duplæ hypologarithmis. |
|---|---|
| 1(2). | 1(3) 1(4). |
| 1(3) 1(4). | 1(5) 1(6) 1(7) 1(8). |
| 1(4) 1(5) 1(6). | 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12). |

Si-

Similiter multiplicatæ.cuiuſque rationis æquemultiplex deprehenditur logarithmus; quia quaſi æquemultipli ſunt hyperlogarithmi, & quaſi æquemultipli ſunt hypologarithmi. Et è conuerſo ſubmultiplicatæ deprehenditur ſubmultiplex logarithmus.

## APPENDIX.

CVm hæc ſcriberem, mihi contigit rectum tramitem inuenire, ad perſequendos omnium numeroſarum rationum logarithmos. Oportet autem eiuſdem ab initio propoſitæ ſeriei fractionum terminos aſſumere, aliquotenos à primo, ſingulos, binos,ternos, quaternos,quinos,& deinceps. Porrò ex totenis collectas quantitates voco prologarithmos, & totenorum ſeriem, voco ſeriem prologarithmorum.

Eſto autem ſeries ſingulorum *A*: ſeries prologarithmorum ex binis *B*: ſeries prologarithmorum ex ternis *C*: item ex quaternis *D*: item ex quinis *E*: & deinceps aliæ. Deinde ſeries ordinetur exceſſuum, primi prologarithmi ſeriei *B*, ſupra primum ſeriei *A*; & ſecundi,ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis duplæ. Nam primus exceſſus, eſt hypologarithmus inter maximos terminos rationis duplæ: ſumma ex primo & ſecundo, eſt hypologarithmus, inter ſubduplos maximorum: ſumma ex primo ſecundo & tertio, eſt hy-

| | | | |
|---|---|---|---|
| *E* | 1(1) 1(2) 1(3) 1(4) 1(5). | 1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10). | 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15). |
| *D* | 1(1) 1(2) 1(3) 1(4). | 1(5) 1(6) 1(7) 1(8). | 1(9) 1(10) 1(11) 1(12). |
| *C* | 1(1) 1(2) 1(3). | 1(4) 1(5) 1(6). | 1(7) 1(8) 1(9). |
| *B* | 1(1) 1(2). | 1(3) 1(4). | 1(5) 1(6). |
| *A* | 1(1). | 1(2). | 1(3). |

pologarithmus, inter ſubtriplos maximorum. Ergo ſumma omnium, hypologarithmorum eſt maximus, nempe logarithmus.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *C*; ſupra primum ſeriei *B*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis ſeſquialteræ.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *D*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis ſeſquitertiæ.

Similiter ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *E*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis quam habent numeri ex quotenis eſt ſeries *E*, & ex quotenis eſt ſeries *C*. Nam primus exceſſus, inter maximos eiuſdem rationis terminos eſt hypologari-

garithmus: primi vero & secundi excessuum summa, est hypologarithmus inter subduplos maximorum: primi secundi & tertij summa excessuum, est hypologarithmus inter subtriplos; & sic deinceps.

*Cap. 6.*

Sextum & vltimum, pro sexto est elemento: numerosa duarum propositionum quinti elementi reductio, quarum est vsus insignis in sexto.

*Prima, quæ est 99. 5.*

Quatuor hormonicè dispositarum quantitatum, si prima maxima est omnium, logarithmus, rationis primæ ad secundam, ad logarithmum rationis tertię ad quartam, minor est, quàm vt prima ad tertiam; maior, quàm vt secunda ad quartam.

Sint quantitates numerosas inuicem rationes habentes, harmonicè dispositæ 1(4) 1(5) 1(8) 1(9) quarum maxima 1(4).

Dico logarithmum rationis 1(4) ad 1(5) ad logarithmum rationis 1(8) ad 1(9), minorem esse, quàm vt 1(4) ad 1(8; maiorem verò, quàm vt 1(5) ad 1(9). idest

Dico logarithmum rationis 5 ad 4 ad logarithmum rationis 9 ad 8, minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò, quàm vt 9 ad 5. idest

Dico rationem 5 ad 4, ad rationem 9 ad 8, logarithmicè minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò logarithmicè, quàm vt 9 ad 5. idest

Dico rationem 5 ad 4 quadruplicatam, depressiorem

esse

esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam altiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata.

Et quia ambæ rationes 5 ad 4, & 9 ad 8, sunt maioris inæqualitatis: inter quas depressiores altioribus sunt minores. Dico 5 ad 4 quadruplicatam minorem esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam, maiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata. idest

Dico potestates quartam 5 ad quartam 4, minorem esse quam vt octaua 9 ad octauam 8: quintam verò 5 ad quintam 4, maiorem quam vt nona 9 ad nonam 8. idest

Dico productos sub potestatibus, sub quarta 5, & octaua 8, minorem, quàm sub quarta 4, & octaua 9: sed sub quinta 5, & nona 8, maiorem, quàm sub quinta 4, & nona 9.

*Potestates.*

| | | |
|---|---|---|
| Quarta | 5 | 625 |
| Octaua | 8 | 16777216 |
| | | 83886080 |
| | | 33554432 |
| | | 100662296 |
| | | 10485659900 |

Quar-

| | | |
|---|---|---|
| Quarta | 4 | 256 |
| Octaua | 9 | 43046721 |
| | | 258280326 |
| | | 215233605 |
| | | 86093442 |
| | | 11019960576 |
| Quinta | 5 | 3125 |
| Nona | 8 | 134217728 |
| | | 671088640 |
| | | 268435456 |
| | | 134217728 |
| | | 402653184 |
| | | 419430400000 |
| Quinta | 4 | 1024 |
| Nona | 9 | 387420489 |
| | | 1549681956 |
| | | 774840978 |
| | | 387420489 |
| | | 396718580736 |

*Secunda, quæ est* 100. 5.

Quatuor arithmeticè dispositorum numerorum, ratio primi ad secundum totuplicata, quotus est primus, maior est ratione tertij ad quartum totuplicata, quotus est quartus: ratio verò primi ad secundum totuplicata, quotus est secundus, minor est, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus est tertius.

Sint quatuor arithmeticè dispositi numeri 8, 5, 7, 4.

Dico rationem 8 ad 5 octuplicatam, maiorem esse ratione 7 ad 4 quadruplicata: & rationem 8 ad 5 quintuplicatam, minorem septuplicata 7 ad 4. idest

Dico potestates octauam 8 ad octauam 5, maiorem esse, quàm quarta 7 ad quartam 4: quintam 8 ad quintam 5, minorem, quàm septima 7 ad septimam 4. idest

Dico productos sub potestatibus, sub octaua 8, & quarta 4, maiorem esse, quàm sub octaua 5, & quarta 7: & sub quinta 8, & septima 4, minorem, quàm sub quinta 5, & septima 7.

| | | Potestates. |
|---|---|---|
| Octaua | 8 | 16777216 |
| Quarta | 4 | 256 |
| | | 100663296 |
| | | 83886080 |
| | | 33554432 |
| | | 4294967296 |

| | | |
|---|---|---|
| Octaua | 5 | 390625 |
| Quarta | 7 | 2401 |
| | | 390625 |
| | | 1562500 |
| | | 781250 |
| | | 937890625 |
| Quinta | 8 | 32768 |
| Septima | 4 | 16384 |
| | | 131072 |
| | | 262144 |
| | | 98304 |
| | | 196608 |
| | | 32768 |
| | | 536870912 |

Poteſtates.

| | | |
|---|---|---|
| Quinta | 5 | 3125 |
| Septima | 7 | 823543 |
| | | 4117715 |
| | | 1647086 |
| | | 823543 |
| | | 2470629 |
| | | 2573571875. |

*Errata.* | *Corrige.*

In Præfatione præcedenti.

| *Pag.* | *lin.* | *col.* | | |
|---|---|---|---|---|
| 52 | 7 | 1 | 164025 | 273375 |
| | 8 | 1 | 9216 | 27648 |
| | 9 | 1 | 49 | 343 |

In Opere ſequenti.

| *Pag.* | *lin.* | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 20 | baſibus, quæ | baſibus, quælibet quantitas fuerit ſumma duarum, quæ |
| 64 | 25 | quoties | quotus |
| | 26 | quoties | quotus |
| 207 | 27 | ſupra lineolam | ante parentheſes |
| 208 | 3 | infra lincolam | inter parentheſes. |



SOLI DEO GLORIA.